

## Лекция 1

**Физикадағы зерттеу әдістері. Теориялық, эксперименттік және сандық әдістер. Сандық әдістердің дамуына тарихи шолу. Дифференциалдық теңдеулердің классификациясы. Қарапайым және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер. Теңдеулердің қасиеттері.**

### **Бақылау сұрақтары:**

1. Қарапайым және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер деп қандай теңдеулерді айтамыз?
2. Сызықты дифференциал теңдеу дегеніміз не?
3. II ретті теңдеулер қандай түрлерге жіктеледі?
4. Біртекті дифференциал теңдеу дегеніміз не?
5. Дифференциал теңдеулердің реті қалай анықталады?

Өткен уақыттарда жылуфизикасында, өзге физикалық ғылымдардағыдай, зерттеудің екі әдісі болатын: теориялық және тәжірибелік. Мынадай сұрақ туындайды: осы әдістерге байланысты есептеу әдістері қандай қатынаста болады? Бұл әдістер зерттеудің жаңа жеке түрлері болып табылады деп айтуға болады, алайда, олардың теориялық та, тәжірибелік сипаттары да бар және жоғарыдағы әдістердің орнын баспайды, керісінше толықтырады.

Есептелетін жылуфизика, әрине, таза теориялық ғылым емес (мұндай ғылымдар болғанның өзінде) – ол тәжірибелік салаға жақын.

Дербес туындылы бейсызық теңдеулерді сандық тұрғыдан шешудің қазіргі математикалық теориясы әлі де дәл емес: тұрақтылық қатаң түрде зерттелмейді, қателіктер қатаң түрде бағаланбайды және үйлесімділікті дәлелдеу мүмкін емес. Шешімдердің болуы мен жалғыздығын дәлелдеу барысында кейбір жетістіктерге жеткеніміз рас, бірақ, бұл мәліметтер қызығушылықты қанағаттандыратындай жеке сұрақтарға жауап беруге жеткіліксіз.

Сондықтан есептелетін жылуфизикада ықшамдалған сызықтандырылған есептерді қатаң математикалық зерттеуге, эвристикалық негіздеулерге, физикалық интуицияға, аэродинамикалық құбырлардағы ауаның сорылуына және сынақ процедуралары мен қателіктерге сүйенуге тура келеді.

Қолданбалы математика саласының маманы Био жалпы қолданбалы математика бойынша ескертулер айтқан. Ал бұл ескертулер бүгінгі күні, әсіресе, есептелетін жылуфизикаға сәйкес келеді. Бейтманның айтқан сөзін алға тартып, бұл қолданбалы математикті «математикалық өзіндігі жоқ математика» деп сипаттай отырып, Био қолданбалы математик пен таза математик арасындағы байланысты сөз етеді: «Шығармашылық барысында физика және психология заңдарынан ауытқыма деп әрқашанда есіне салынып отыратын суретшінің сезімін түсінуге болады, алайда, түстік үйлесімділіктер туралы ғылымды оған оқу ауадай қажет». Есептелетін жылуфизиканы енді бастап оқып, үйреніп келе жатқан адамға бұл салада қаншалықты ғылым

кажет болса, соншалықты өнердің де керек екендігі туралы алдын-ала ескертіп қойған жөн.

Жылуфизикалық есептерді сандық модельдеу теориялық жылуфизикаға карағанда тәжірибеге көп жақын. Әрбір жеке есептеуді ЭЕМ-да жүргізу физикалық тәжірибе жасауға өте ұқсас. Мұнда зерттеуші теңдеулерді «қосып», ал содан соң процестің қалай өтетіндігін бақылайды; дәл осылайша экспериментатор да жұмыс жасайды. Есептеу жүргізу барысында жаңа физикалық құбылыстардың ашылуы таңсық емес; мысалы, Кемпбелл мен Мюллер [1968] сандық тәжірибе барысында дыбысқа дейінгі серпілістің бір нұсқасын ашқан және осыдан кейін ғана бұл құбылысты аэродинамикалық құбырларда жасалған тәжірибе кезінде байқаған. Алайда, сандық тәжірибені жүргізетін зерттеушінің белгілі бір мүмкіндіктері бар. Ол тығыздық, тұтқырлық сияқты және т.б. сұйықтың қасиеттерін өз еркінше қалап алады, тіпті, гидродинамикалық шамалардың мәндерін анықтағаннан кейін ағында ауытқулар болмайды. Есептеуші лабораториялық жағдайларда жүзеге аспайтын таза екіөлшемді тәжірибе жүргізе алады. Ол ағын параметрлерін қалауынша таңдай алады, яғни, шекаралық қабаттың бастапқы қалыңдығы мен жылдамдық профилін бірлік ұзындыққа қатысты Рейнольдс және Мах сандарына тәуелсіз түрде таңдай алады, ал бұл жағдай аэродинамикалық құбырларда жасалған тәжірибеде мүмкін болмайды. Ең маңызды жағдай – экспериментатор – есептеушінің теоретик те, экспериментатор – физик те жасай алмайтын мүмкіндігі бар. Ол тұтқырлық коэффициенті тұрақтылығының, Архимед күшін ескермеу, Прандтль санының бірге тең болуы, шекаралық қабат теориясының болжамдары сияқты және т.б. тәуелсіз ықшамдауға арналған физикалық болжамдардың әрқайсысы берілген физикалық құбылысқа жеке дара қалай әсер ететіндігін тексере алады. (Аэродинамикалық құбырда тәжірибе жасау үшін тұтқыр емес, жылу өткізбейтін идеал газ толтырылған темір жол цистернасына тапсырыс жасаған адам жайлы әзіл әңгімені еске салайық). Есептеуші ньютондық емес сұйықтың жаңа моделі жағдайында да негізгі күй теңдеулерінің дұрыстығына көз жеткізе алады.

Дегенмен де сандық тәжірибе ешқашанда және ешқандай мөлшерде де физикалық тәжірибенің де, теориялық талдаудың да орнын баса алмайды. Бұл жағдайдың негізгі бір себебі – тұтас ортаның күй теңдеулерін ешқашанда дәл деп айтуға болмайды, екінші бір себебі – экспериментатор – есептеуші тұтас ортаның қозғалысының дифференциалдық теңдеулерімен жұмыс жасамайтындығында жатыр. Бұл кезде есептелетін дискретті теңдеулер бастапқы дифференциалдық теңдеулерге тордың ұсақталуының шекті жағдайында ғана өтеді, өйткені, мұндай шекке жету мүмкін емес. Теңдеулердің дискреттену процесі көп жағдайда мөлшерлік дәлдікті ғана емес, сонымен қатар шешімдердің сапалық тәртібін де өзгертеді. Зерттеуші тұтқыр емес сұйыққа арналған теңдеулермен жұмыс жасауды көздеме болса да, дискретті аналогтардың бір түрі тұтқырлық эффектілерін қосады. Екінші бір маңызды шектеудің бірі – сандық тәжірибенің турбуленттілікті және өте кіші масштабқа ие болғандықтан шекті-айырымды торда жеткілікті түрде

жақын дәлдікпен шешіле алмайтын физикалық құбылыстарды (турбуленттілік, сырғанау сызықтары, құйындар, т.б.) ескере алмайтындығы. Бірақ, осы құбылыстар шындығында ағыстың ірі масштабты қасиеттеріне айтарлықтай әсер етеді. Мұндай құбылысқа мысал ретінде шекаралық қабаттағы турбуленттіліктің ажырау нүктесінің орналасуына әсерін айтуға болады. Екіөлшемді ағыстар деп аталғанымен, тәжірибеде екіөлшемді болмайтын ағыстар да бар: олардың мысалы ретінде ажыраған жазық ағынның қайта қосылу сызығының арғы жағындағы ағысты айтуға болады. Мұндай жағдайларда сандық тәжірибенің нақты екіөлшемділігінің артықшылығы алдамшы болуы мүмкін.

Сандық тәжірибе физикалық тұрғыдан да шектелген, нақтырақ айтқанда, параметрлердің жеке комбинациясы үшін дискретті ақпарат бере алады. Ол өлшемділіктерге талдау жасау арқылы негізгі теңдеулерден алынатын функционалды тәуелділіктерден өзге қатынастарды орната алмайды және сәйкесінше қарапайым теорияның да орнын баса алмайды.

Ендеше, есептелетін жылуфизика тәжірибелік және теориялық жылуфизикадан бөлек, жеке дара пән болып табылады. Оның өзіндік әдістері, өзіндік қиындықтары мен өзінің қолдану аясы бар. Міне, осы сала физикалық процестерді оқып-үйренуде жаңа мүмкіндіктерді аша түспек.

1910 жылы Л. Ричардсон Корольдік қоғамына дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді сандық талдаудың іргетасы болып саналатын елу беттік мақаланы ұсынған болатын. Бұған дейін Шепперд шекті-айырымды операторлар бойынша іргелі жұмыс жасағанымен, Ричардсонның қосқан үлесі алдыңғы зерттеулердің бәрін өз көлеңкесінде қалдырды. Ричардсон Лаплас теңдеулерін, бигармониялық теңдеулерді және өзге де теңдеулерді шешудің итерациялық әдістерін жасады. Ол шекараның белгілі бір бөлігінен бастап шешімді жалғастыруға болатындығына немесе болмайтындығына қатысты стационар есептер арасындағы айырмашылықты тапты, яғни қазіргі терминологиямен айтсақ, гиперболалық және эллипстік есептерді ажырата білді. Ричардсон шекаралық шарттардың, оның ішінде бұрыштық нүктедегі және шексіздіктегі шекаралық шарттардың қойылуын жіті зерттеген. Ол қателіктерді бағалай білді, тор қадамы нөлге ұмтылған жағдайда алынған нәтижелерді экстраполяция-лау әдісін ойлап тапты, сонымен қатар сандық шешімдерді қарапайым пішінді денелердің, мысалы цилиндр үшін дәл шешімдерімен салыстыра отырып тексеруді ұсынды. Ендеше, ол ең алғаш рет ақиқатқа сай сандық әдістерді кең масштабты тас дамбадағы кернеуді анықтау сияқты тәжірибелік есепке қолдана алды.

Ричардсонның эллипстік теңдеулерге арналған итерациялық әдісінде  $n$ -ші итерациясында көрші түйіндердегі  $(n-1)$ -ші итерациядағы «ескі» мәндерден тұратын Есептелетін тордың әрбір түйінінде кезегімен шекті-айырымды теңдеу қанағаттандырылады. 1918 жылы Либман үйлесу жылдамдығын есептеліп болған түйіндердегі «жаңа» мәндерді қолдану арқылы едәуір арттыруға болатындығын көрсетті. «Үздіксіз ығысулардың» мұндай схемасында әрбір  $n$ -ші итерацияда  $(n-1)$ -ші итерациядан алынған ескі мәндердің кейбір саны және көрші түйіндердегі  $n$ -ші итерациядан алынған

жаңа мәндердің саны қолданылады. Либманның итерациялық әдісінің әрбір циклында Ричардсонның итерациялық әдісінің қос циклындағыдай ең көп деген қателіктер азая түседі (Франкел [1950]).

Бұл теңдеу дербес туындылы теңдеулерді сандық талдаудың ерекшелігін көрсетеді. Әйтсе де, шекті-айырымды аппроксимацияның, итерациялық схемалардың немесе шекаралық шарттардың шамалы өзгерісі үлкен жетістікке әкелуі ықтимал екен. Керісінше, кейбір шындыққа өте жақын және бір қарағанда дәл көрінетін сандық схемалар нәтиже бермеуі мүмкін. Осыған сәйкес мысал ретінде жылуөткізгіштіктің параболалық теңдеуіне арналған Ричардсонның айқын схемасын айтуға болады. Бұл теңдеуде туындыларды кеңістіктік айнымалылар және уақыт бойынша орталық айырымдармен шекті-айырымды аппроксимациялау әдісі қолданылған болатын. О'Брайен өзге авторлармен бірігіп [1950], жоғарыдағы схеманың орныксыз екендігін дәлелдеді.

ЭЕМ пайда бола қоймаған кезде басты назар эллипстік теңдеулерге түсетін. Филлипс пен Винер [1923] үйлесімділікті ең алғаш қатаң математикалық жолмен дәлелдеп, эллипстік теңдеулерді шешуге бағытталған Либманның итерациялық әдісінің қателігін бағалады. 1928 жылы Куранттың, Фридрихс пен Леvidің классикалық еңбектері жарық көрді. Бұл авторлар шекті-айырымды әдістерді негізінен таза математикада зерттеу құралдары ретінде қолдана білді. Дифференциалдық теңдеулерді дискреттеп, дискретті жүйенің дифференциалдық жүйемен үйлесетіндігін, алгебралық тәсілдер арқылы дискретті жүйенің шешімдерінің болатындығын анықтай отырып, эллипстік, гиперболалық және параболалық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шешімдердің болуы мен жалғыздығы туралы теоремаларды дәлелдеп берді. Мұндай ауқымды жұмыс шекті-айырымды шешімдердің келер жылдардағы қолдану аясын нақтылап берді.

Кеңес Одағының тұсында дербес туындылы теңдеулер үшін шекті-айырымдар әдісі жүйелі түрде 30-жылдары жасала бастады. Осы саладағы ең алғашқы зерттеулерге С.А.Гершгорин [1930], Л.А.Люстерник [1934], Д.Ю.Панов [1932-1933], И.Г.Петровский [1941] және т.б. ғалымдардың еңбектерін жатқызуға болады.

Тұтқыр сұйық гидродинамикасының есептеріне арналған дербес туындылы теңдеулердің алғашқы сандық шешімін 1933 жылы Том берді. 1938 жылы Шортли мен Уэллер шын мәнінде Либман әдісінің күрделірек түрі болатын әдісті ойлап тапты. Олар блоктік релаксацияны, үлгілік функция әдісін, қателіктің релаксациясын, тордың ұсақтануы әдісі мен қателікті экстраполяциялауды ұсынды. Сонымен қатар олар алғашқы болып үйлесімділік жылдамдығын дәл анықтап, зерттеді.

Саусвелл [1946] эллипстік теңдеулерді сандық тұрғыдан шешу үшін релаксация әдісінің анағұрлым тиімдірек нұсқасын жасады. Оның байланыспайтын релаксация әдісінде тордың әрбір түйінінде есептеу жүргізілмейді, тек тор бойынша байланысы жоқ түйіндерді анықтаудың өзі жеткілікті. Осы түйіндерде ғана жаңа мәндер есептеледі. (Жылуөткізгіштіктің стационар теңдеуі жағдайында байланыссыздық тор

ұяшығындағы энергияның жинақталу жылдамдығына тәуелді; сәйкесінше, стационар жағдай байланыссыздықтың барлығы нөлге тең болғанда орнайды). Фокс [1948] жоғарғы және төменгі релаксация схемаларын (мұндай схемаларда байланыссыздықтар дәл нөлге тең деп қабылданбайды) енгізе отырып, Саусвеллдің релаксация әдісінің күрделірек нұсқаларын жасады. Бұл тәсілді релаксация процесі жүретін тор түйіндерін және блоктік релаксация схемасын таңдап алудың әдісі деп атайды.

1955 жылы Аллен мен Саусвелл Саусвеллдің релаксация әдісін цилиндрді тұтқыр сығылмайтын сұйық ағысының орай ағуын есептеуде пайдаланды. Бұл белгілі бір деңгейде Есептелетін гидродинамикадағы алғашқы жұмыстардың бірі болып саналды. Тізбекті тікбұрышты тордағы дөңгелек шекараны көрсету үшін конформды түзілістер қолданылды. Нәтижесінде Рейнольдс санының 1000-ға тең мәндерінде сандық орнықты шешімдер алынды. Бұл орнықтылықтың физикалық шегінен асып түсті. Есептеулер жүргізу барысында авторлар Рейнольдс санының 100 мәнінде орнықсыздықтар басым болатындығын анықтап, оны физикалық тұрғыдан ағынның физикалық орнықсыздығымен байланыстырған. Осылайша олар сандық модельдеу ұғымына жаңалық енгізді. Олардың еңбегі сонымен қатар ғылыми зерттеулерді қаржыландырудың үлгісі бола алды: осы зерттеу жұмыстарын жүргізу үшін Лондондық имперлік колледжге 1945 жылы киім тігумен айналысатын фирмадан үлкен көмек көрсетілген.

Саусвелл әдісін ЭЕМ-да пайдалану оңайға соқпайды. Есептеу жүргізуші адам арифметикалық операциялар жүргізуге қарағанда максимал байланыссыздықты іздеу барысында матрицаны қарап шығуға аз уақыт жұмсаған. ЭЕМ үшін матрицаны қарап шығу жылдамдығы арифметикалық операцияларды жүргізу жылдамдығынан асып кетпейді, сондықтан бұл жерде релаксацияны тізбектей тордың барлық түйіндерінде байланыссыздық нөлге тең болғанға дейін жүргізген анағұрлым тиімдірек. Бұл әдіс Либман әдісіне сәйкес келеді.

Осылайша, ЭЕМ пайдалану Саусвеллдің жоғарғы релаксация идеясын қоса қолдану арқылы Либман әдісі сияқты есептеу тәсілдерінің дамуына ықпал етті. 1950 жылы Франкел (одан тәуелсіз түрде 1954 жылы Янг) жаңа әдісті ойлап тапты. Ол бұл туындысын Либманның экстраполяцияланған әдісі деп атаса, кейіннен ол тізбекті жоғарғы релаксация (Янг [1954]) немесе тиімді жоғарғы релаксация әдісі деп аталатын болды. Франкел бұған қоса эллипстік теңдеулерді итерациялық шешу және параболалық теңдеулерді уақыт бойынша қадам арқылы шешу арасындағы ұқсастықты байқаған. Бұл өз кезегінде маңызды нәтижелер берді.

ЭЕМ дамуына сай параболалық теңдеулерге де аса мән беріле бастады, өйткені, бейстационар шешімдерді ескерудің мүмкіндігі туған болатын. Бірөлшемді бейстационар гидродинамикаға зор үлес қосқан Рихтмайердің алғашқы монографиясында [1957] оннан аса сандық схемалар келтірілген болатын. Көпөлшемді жағдайда бірінші айқын емес схема ретінде 1947 жылы жарық көрген Кранк-Николсон әдісін айтуға болады. Бұл әдіс әрбір уақыттық қабатта итерация жүргізуді талап етті. Мұндай әдіс осы күнге дейін ең

танымал әдістердің бірі болып қала береді және кеңінен қолданылып жүрген шекаралық қабат теңдеулерінің автотиттік емес шешімдерінің негізінде жатыр (Блоттнер [1970]).

Ең алғаш рет уақыт бойынша анықтаудың асимптотикалық әдісі идеясы қашан пайда болғандығын дәл басып айту қиын. Бұл әдісте стационар шешімді алу үшін бейстационар ағыс теңдеулерін интегралдау керек. Мұндай идеяның ЭЕМ пайда болмай тұрған кезде қарастырылғандығы сөз жоқ күмән тудырады.

Есептелетін гидродинамика саласындағы ең алғашқы жұмыстардың көпшілігі Лос-Аламос зертханасында жүргізілген болатын. Дәл осы Лос-Аламоста Екінші дүниежүзілік соғыс кезінде фон Нейман параболалық шекті-айырымды теңдеулердің орнықтылық критерийін жасаған болатын және сызықтандырылған жүйені зерттеудің әдісін ұсынған. Оның жұмыстары жөніндегі қысқаша есеп ашық әдебиет беттерінде тек 1950 жылы ғана жарияланды (Чарни және өзге де авторлар; [1950]). Мұндай маңызы зор мақалада алғаш рет құйын үшін бейсызық теңдеулерді зерттеуге бағытталған кең көлемді метеорологиялық есептеулер келтірілген болатын. Авторлар құйын үшін жазылған теңдеулердің орнықтылығы қарапайым физикалық айнымалыларға (жылдамдық пен қысым) арналған дәстүрлі теңдеулерге қарағанда артықшылығы көбірек екендігін анықтаған және бейстационар есептің мағынасының эвристикалық түсін-дірмесін кіріс пен шығыс шекаралардағы математикалық толық емес шарттары бар есеп ретінде берген.

1950 жылы Нейман шекті-айырымды схемаларға орнықтылық ұғымын енгізуді ұсынғанымен, диф-ференциалдық теңдеулердің нақтылығы және олардың орнықтылығы мен аппроксимациясынан үйлесімділіктің туындайтындығы жөніндегі теоремаға сәйкес, орнықтылықтың мағынасын алғаш рет тек кеңестік математиктер - В.С. Рябенский [1952] мен А.Ф. Филиппов [1955] ашып берді.

Елуінші жылдардың ортасында Писмен мен Ракфордтың [1955], сонымен қатар Дуглас пен Ракфордтың [1956] еңбектерінде уақыт бойынша үлкен қадамдарда қолдануға болатын параболалық теңдеулерді шешуге арналған тиімді айқын емес әдістер ұсынылды. Тізбекті бағыттар әдісінің айқын емес схемасы атауымен оларды Франкел аналогиясын қолдану арқылы [1950] эллипстік теңдеулерге пайдаланды. Франкел теориясы параболалық теңдеулердегі шешімнің уақыт бойынша өтуі мен эллипстік теңдеулердегі шешімнің итерациялар бойынша өтуінде жүзеге асырылды.

Тізбекті бағыттардың айқын емес схемасы құйынның тасымал теңдеулері қолданылатын сығылмайтын сұйық ағысы туралы есептерде кеңінен пайдаланылады.

1953 жылы Дюфорт пен Франкел параболалық теңдеулерге арналған өздерінің «чехарда» схемасын жариялады, бұл схеманы жоғарыда айтылған схемаға ұқсас қалауымызша алынған уақыт бойынша үлкен қадамдарға (конвективті мүшелер болмаса) пайдаланған тиімді. Бірақ, бұл әдіс таза айқын схемалардың қасиеттерін сақтайды. Бұл схеманы Харлоу мен Фромм

[1963] бейстационар құйындық жолдың сандық шешімін анықтауда ұтымды қолдана білді.

Есептердің бір тобы үшін есептеу алгоритмінің біркелкілігі мен біртектілігін талап ету біртекті айырымдық схемалар ұғымына алып келді. Бұл ұғымды А.Н. Тихонов пен А.А. Самарский [1950-1964] түсіндіріп берді. С.К. Годунов [1958] сақталу заңдарын газ динамикасының үзілісті шешімдерінің схемасын шығаруда қолданды. Гидродинамика мен жылуфизикасының есептерін шешуде А.А. Дородницын ұсынған және О.М. Белоцерковский, П. И. Чушкиндар дамытқан интегралдық қатынастар әдісі маңызды рөл атқарады. Бұл тәсілде түзулер әдісінің негізінде дивергентті түрде жазылған теңдеулерге ішінара айырымды аппроксимация жасалынады. Осындай әдістер квазисызықты теңдеулерге арналған айырымды схемалардың құрылымына деген жалпылама көзқарастың қалыптасуына үлкен себеп болды.

Scientific American атты журналдың беттерінде жарияланған Харлоу мен Фроммның мақаласы [1965] Құрама Штаттардың ғылыми қоғамының назарын Есептелетін гидродинамиканың мүмкіндіктеріне аударуға арнайы бағытталған еді. Шамамен осы кездерде La Houille Blanche деп аталатын француз журналында жоғарыдағы мақалаға ұқсас Маканоның мақаласы жарық көрді [1965]. Екі мақалада да ең алғаш рет сандық модельдеу мен сандық тәжірибе ұғымдарына нақты анықтама берілді. Осы мақалалар оқырман назарына ұсынылғаннан кейін Есептелетін жылуфизика жеке пән болып қалыптаса бастады.

Жоғарыда айтылған уақытқа тәуелді шешімдердің барлығының Есептелетін орнықтылығы жоғарыдан Рейнольдс саны бойынша шектелген болатын (негізі бұл шек Рейнольдстің тор санымен, яғни шекті – айырымды тор ұяшығы қадамының өлшемі бойынша табылған сан арқылы анықталады). 1966 жылы Томан мен Шевчик конвективті мүшелерді бейнелеу үшін ағынға қарсы айырымды пайдалану арқылы және шекаралық шарттарға басым көңіл бөле отырып, шектеусіз Есептелетін орнықтылыққа қол жеткізді. Олардың цилиндрді орай ағудағы есептеулері Рейнольдс санының миллионға тең мәндеріне дейін таралды; Есептелетін орнықсыздықтарды болдырмай, цилиндрді «айналдырып», магнустық көтеру күшін ала білді. Олардың схемасы бірінші ретті дәлдікке ие болғанымен, алған нәтижелерінің тәжірибелік мәліметтермен жақсы үйлесімділік табуы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді айырымдық бейнелеуде пайда болатын аппроксимация қателіктерінің ресми дәлдігінің маңыздылығын асыра бағалауға итермеледі. Осы себепке сай шекаралық шарттардың сандық қойылуының айтарлықтай әсерін анықтаған Ченнің еңбегін [1968] атап айтуға болады.

Эллипстік Пуассон теңдеуін сандық шешуге бағытталған тура (итеративті емес) Фурье әдістері бұрыннан белгілі бола бастаған (мысалы, Вазов пен Форсайттың [1960] монографияларын қараңыз), бірақ, оларды гидродинамика есептеріне сол кезде пайдаланбаған. 1965 жылы Хокни туыстас, бірақ, Пуассон теңдеуі үшін үлкен шекаралық есептерді тиімді

шешуге мүмкіндік берген әрі жылдам нәтиже беретін әдісті ойлап тапты. Осы еңбек жарық көргеннен соң Пуассон теңдеуі үшін тура әдістер қарқынды дами түсті.

Жоғарыда айтылған әдістердің барлығы сығылатын сұйықтың дыбысқа дейінгі аймағындағы ағысын есептеуге жарамды. Асқын дыбыстық есептер дыбысқа дейін-гілерден бірнеше маңызды белгілерімен ажыратылады. Оның ішіндегі маңыздысы - асқын дыбыстық ағыста соқпа толқындардың (яғни, шешімдердің үзілуі) пайда болуы.

Гиперболалық теңдеулерді сандық шешуге жазылған іргелі еңбектердің бірі – 1928 жылы жарияланған Курант, Фридрихс пен Левидің мақаласы. Мұнда теңдеулердің сипаттық қасиеттері мен жалпылама сипаттамалар әдісі баяндалған. Сонымен қатар осы жұмыста атақты қажетті Курант-Фридрихс-Леви орнықтылық шарты алынып, түсіндірілген болатын. Бұл шартта сипаттық тормен сәйкес келмейтін Есептелетін торда айырымдық теңдеулердің тәуелділік облысына дифференциалдық теңдеулердің тәуелділік аймағы да кіруі тиіс деп айтылады. Бұл КФЛ орнықтылық шарты (қазіргі заманғы терминологияда Курант саны бірден кем болуы тиіс деп айтылады) Лагранж және Эйлер айнымалыларында жазылған гидродинамика теңдеулері үшін орындалады.

«Бөлшектерді» бақылау негізіндегі Лагранж әдістері жоғарғы деңгейге дейін Лос-Аламос зертханасында жетілдірілген болатын (Фромм [1961]). Жалпы айтқанда, екіөлшемді есептер үшін Эйлер әдістерін пайдаланған дұрыс, алайда, оларды қолдану барысында соқпа толқындарды ескеру қиынға соғады. Егер тор ұяшығының өлшемі соқпа толқынның қалыңдығынан аз болмаса, дәлдікті кемітетін осцилляциялар пайда болады. Бұл осцилляциялар дискретті торда физикалық мағынаға ие болады (Рихтмайер [1957]). Соқпа толқын арқылы өткенде жылдамдықтың жоғалуының әсерінен бөлінетін кинетикалық энергия молекулалардың өзара кездейсоқ соқтығысының ішкі энергиясына айналады; есептеу барысында молекулалардың рөлін шекті-айырымды тордың ұяшықтары атқарады.

Эйлер торындағы соқпа толқындарды есептеудің қарпайым түрі соқпа толқындардан белгілі бір қашықтықта шешімге әсер ете қоймайтын жасанды тұтқырлықты айқын немесе айқын емес жолмен енгізе отырып, секірісті бірнеше ұяшыққа дейін «жойып жіберу» болып табылады. 1950 жылы фон Нейман мен Рихтмайер жасанды тұтқырлық схемасын ұсынды. Мұнда «тұтқырлық коэффициенті» жылдамдық градиентінің квадратына пропорционал болған. Ладфорд, Полячек пен Зегер [1953] Лагранж торындағы тұтқыр сұйық ағысы теңдеулерінде физикалық тұтқырлықтың ең үлкен мәндерін ғана таңдап алған, бірақ, олардың әдісінде тұтқырлықтың айтарлықтай үлкен мәндері қажет болған.

Секірісті жою үшін тұтқырлықты айқын енгізудің орнына шекті-айырымды аппроксимацияларда қолданылатын айқын емес тұтқырлықты да пайдалана беруге болады. Осы жағдай Лос-Аламоста Эванс, Харлоу мен т.б. жасаған ұяшықтардағы бөлшектер әдісінде (PIC әдісі), сонымен қатар Лакс әдісінде де (Лакс [1954] кеңінен қолданыс тапты.



1954 жылы жарияланған Лакс еңбегінде сандық схеманың өзі пайдаланылған дифференциалдық теңдеу-лердің түрлеріне – консервативті формаға қарағанда маңызды емес. Лакс тәуелді айнымалылары жылдамдық, тығыздық пен температура болатын қарапайым гидро-динамика теңдеулерін түрлендіру арқылы айнымалылары қозғалыс мөлшері, тығыздық пен тежелудің меншікті ішкі энергиясы болатын теңдеулер жүйесін алуға болатын-дығын көрсетіп берді. Теңдеулердің мұндай жаңа жүйесі сақталу заңдарының мағынасын бейнелеп, шекті-айрымды схемада ағыстың интегралдық сипаттамаларын сақтап қалуға мүмкіндік береді. Мұндай теңдеулер жүйесі пайдаланылатын шекті-айырымды схемалардың түріне қарамастан қазіргі кезде соқпа толқындардың таралуын есептеуде кеңінен қолданылып жүр, өйткені, жазық соқпа толқынның жылдамдығы кез келген тұрақты схема арқылы дәл есептеледі (Лонгли [1960] және Гари [1964]).

### Дифференциалдық теңдеулердің жіктелуі

Есептеуші үшін дифференциалдық теңдеулерді жіктей білу маңызды, өйткені, шешімнің сандық әдісін таңдау осы жағдаймен тығыз байланысты. Дифференциалдық теңдеулерді бірнеше белгілері бойынша жіктеуге болады. Олардың ішіндегі маңыздыларына тоқталып өтейік.

#### - *Қарапайым дифференциалдық теңдеулер және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер*

Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бір ғана айнымалыға тәуелді болса, онда мұндай дифференциалдық теңдеу қарапайым дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бірнеше айнымалыға тәуелді болса, онда мұндай дифференциалдық теңдеу дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Мысалдар.

Құбырдағы сұйықтың стационар бірөлшемді ағысы қарапайым дифференциалдық теңдеумен сипатталады:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \xi \frac{\rho u^2}{2d}, \quad (1.1)$$

өйткені,  $u(x)$  белгісіз функциясы бір ғана  $x$  айнымалысына тәуелді.

Құбырдағы сұйықтың стационар екіөлшемді ағысы дербес туындылы дифференциалдық теңдеумен сипатталады:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1.2)$$

Мұндағы  $u(x, y)$  белгісіз функциясы екі айнымалыға тәуелді:  $x$  және  $y$ .

#### - *Реті*

Теңдеудің реті дифференциалдық теңдеудің құрамына кіретін ең жоғарғы туындының ретіне тең.

Мысалы, (1) теңдеу – I ретті, ал (2) теңдеу - II ретті. II ретті теңдеуді жалпы жағдайда мынадай түрде көрсетуге болады:

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D \frac{\partial f}{\partial x} + E \frac{\partial f}{\partial y} + Ff = G.$$

(1.3)

II ретті теңдеулер келесі түрге жіктеледі:

a) егер  $B^2 - 4AC = 0$  болса, онда (1.3) **параболалық теңдеу** болады;

б) егер  $B^2 - 4AC < 0$  болса, онда (1.3) **эллипстік теңдеу** болады;

в) егер  $B^2 - 4AC > 0$  болса, онда (1.3) **гиперболаалық теңдеу** болады.

(1.2) II ретті теңдеуі параболалық теңдеу болып табылады (оны (1.3) түрге келтіріп,  $B^2 - 4AC$  өрнегінің неге тең болатындығын анықтау арқылы тексеріңіз).

Эллипстік теңдеудің мысалы ретінде  $q(x, y)$  жылулық көзден температураның стационар таралуын бейнелейтін Пуассон теңдеуін айтуға болады ( $q(x, y) > 0$  болғанда  $(x, y)$  нүктесінде жылу бөлінеді, ал  $q(x, y) < 0$  болғанда жұтылады):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -q(x, y). \quad (1.4)$$

Гиперболаалық теңдеудің мысалы ретінде тербелістер теңдеуін келтіреміз:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

Теңдеудің түрі екінші ретті туындылардағы коэффициенттермен ғана анықталатындығын және бірінші ретті туындылар мен функцияның өзіне қатысты коэффициенттерге, бос мүшелерге тәуелді болмайтындығын атап айтамыз.

Айнымалы коэффициенттері бар тағы бір теңдеуді қарастырайық:

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin x \quad (1.6)$$

Мұндағы  $A=x$ ,  $B=0$ ,  $C=1$ , сәйкесінше,  $B^2 - 4AC = -4x$ . Бұл мысал айнымалы коэффициенттері бар теңдеудің түрі нүктеден нүктеге дейін өзгертіндігінің айқын дәлелі:  $x < 0$  болғанда (1.6) теңдеу эллипстік болады, ал  $x = 0$  болғанда (1.6) теңдеу параболалық болса,  $x > 0$  болғанда (1.6) өрнек гиперболаалық болады.

### - **Сызықтылық**

Сызықты деп құрамындағы *тәуелді айнымалы мен оның барлық туындылары өзара сызықты байланысқан* дифференциалдық теңдеуді айтады, оған қоса олар бір-біріне көбеймейді, дәрежеге шығарылмайды, трансцендентті функцияның аргументі бола алмайды және т.с.с.

Мысалы, (1.4)-(1.6) теңдеулер сызықты болса, (1.1)-(1.2) теңдеулер – бейсызықты (неге екенін түсіндіріңіз). (1.3) теңдеу сызықты деп аталады, егер  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  коэффициенттері  $f$  белгісіз функциясына және оның туындыларына тәуелді болмаса.

Жылуфизикалық құбылыстар мен процестерді сипаттайтын теңдеулердің көпшілігі бейсызықты болады.

**- Біртектілік**

(1.3) дифференциалдық теңдеу *біртекті* деп аталады, егер *оның оң жақ бөлігі барлық  $x$  және  $y$  үшін нөлге тең болса*. Керісінше жағдайда теңдеу *біртектісіз* деп аталады.

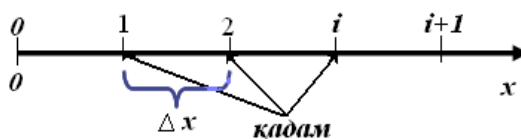
Мысалы, (1.5) теңдеу – біртекті, ал (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) теңдеулері – біртектісіз. Егер  $G=0$  болса, (1.3) теңдеу біртекті деп аталады және  $G \neq 0$  болса біртектісіз болады.

Әдетте, аналитикалық жолмен қарапайым сызықты дифференциалдық теңдеулерді (оның ішінде де барлығын емес) және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің кейбір арнайы түрлерін ғана шешуге болады. Қалған теңдеулер үшін, әсіресе, нақты есептерді сипаттайтын, тәжірибелік қолданысқа ие теңдеулер мен теңдеулер жүйесі үшін сандық әдістер жалғыз шешім беретін тиімді әдістердің бірі болады.

## Лекция 2

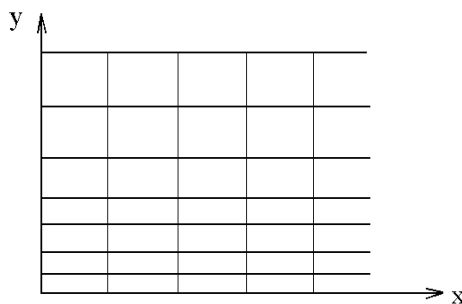
### Айырымды сызбаларды құрудың принциптері. Айырымды сызбалар теориясының негізгі түсініктері мен белгілеулері. Түйін. Қадам. Тор функциясы. Шекті-айырымды сызба.

Шекті айырымдар әдісінің негізгі түсінігі мынада. Ортаның күйі үздіксіз аргументі бар  $f$  функциясының өзгерісінің дифференциалдық теңдеуімен сипатталсын. Аргументтің үздіксіз өзгеру облысы нүктелердің шекті санымен (*түйіндермен*) алмастырылсын. Түйіндер арасындағы қашықтық *қадам* деп аталады (1-сурет).



1-сурет

Түйіндердің жиынтығы *торды* береді, ал тордың өзі *біртекті* немесе *біртектісіз* болады. Егер  $f$  функциясы бір ғана айнымалыға тәуелді болса, онда тор бірөлшемді деп аталады, егер  $f$  бірнеше айнымалылардың функциясы болса, онда тор көпөлшемді деп аталады. Шекті-айырымды тор бір ғана айнымалы бойынша біртекті, ал екінші айнымалы бойынша біртектісіз болуы мүмкін. Мысалы, 1-суретте  $x$  бойынша біртекті және  $y$  бойынша біртектісіз тор бейнеленген.



2-сурет. Шекті-айырымды тор

Шекті-айырымды тордың көптеген түйіндерінде анықталған функция *тор функциясы*  $f_{\Delta}$  деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің құрамына енетін туындылар сәйкес жуықталған алгебралық қатынастармен немесе *шекті-айырымды аналогтармен* алмастырылады (*аппроксимацияланады*) (2-сурет).

Осылайша үздіксіз аргументті  $f$  функциясы үшін дифференциалдық теңдеу  $f_{\Delta}$  тор функциясына арналған алгебралық шекті-айырымды теңдеумен алмастырылады.

**Шекті-айырымды схема** дегеніміз - сәйкес шекаралық шарттары бар дифференциалдық теңдеуді аппроксимациялайтын дискретті алгебралық

*теңдеулер жүйесі.* Дифференциалдық теңдеудің жуық шешімі ретінде сәйкес айырымды теңдеудің шешімі – бір немесе көпөлшемді кесте түріндегі тор функциясы болады.

*Шекті–айырымды схеманы құрастыру барысында қолданылатын тор түйіндерінің жиынтығы **шаблон** деп аталады.*

Алдағы уақытта біз келесі модельдік теңдеуді қолданатын боламыз:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Бұл теңдеудің таңдап алыну себебі – ол бастапқы функцияның уақыт бойынша локальді өзгерісін (теңдеудің сол жағындағы бірінші мүше), конвективті тасымалды (сол жақтағы екінші мүше) және молекулалық тасымалды (теңдеудің екінші бөлігіндегі мүше) ескереді.  $a$  коэффициенті  $\nu$  кинематикалық тұтқырлыққа тең, егер  $f$  жылдамдық  $\nu$  болса, немесе  $D$  диффузия коэффициентіне тең, егер  $f$  концентрация  $c$  болса және ол температура өткізгіштік коэффициенті болады, егер  $f$  температура  $T$  болса. Соңғы жағдайда  $f \equiv T$  болғанда (2.1) теңдеу бірөлшемді каналдағы сұйық тұрақты  $u$  жылдамдықпен қозғалған кездегі температура өзгерісінің бейстационар процесін сипаттайды.

### Лекция 3

**Дифференциалдық теңдеулерді шекті айырымдармен бейнелеу әдістері.  
Тейлор қатарына жіктеу әдісі. «Алға», «артқа» және «орталық» шекті-  
айырымды сызбалар.**

$f(x)$  функциясын  $x_i$  нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктейік:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{df}{dx}\Big|_i (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_i (x_{i+1} - x_i)^2 + \\ + \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_i (x_{i+1} - x_i)^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4),$$

мұндағы ЖРМ – жоғары ретті мүшелер.

Ықшамдау үшін төмендегідей белгілеулер енгіземіз:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad f_{i+1} = f(x_{i+1}), \quad f_i = f(x_i), \quad f_{i-1} = f(x_{i-1}).$$

Соңғы өрнекті жаңа белгілеулер арқылы жазайық:

$$f_{i+1} = f_i + \frac{df}{dx}\Big|_i \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_i \Delta x^2 + \\ + \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_i \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (2.2)$$

Барлық жоғары ретті мүшелерді былайша белгілеп алайық:

$$O(\Delta x^2) = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_i \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4),$$

онда (2.2) өрнек мынадай түрге ие болады:

$$f_{i+1} = f_i + \frac{df}{dx}\Big|_i \Delta x + O(\Delta x^2).$$

Мұндағы  $O(\Delta x^2)$  белгілеуі келесі қосылғыштардың ең кіші реті екіге тең екендігін білдіреді; қалған қосылғыштардың реті жоғары болады. Осы жерден  $i$  нүктесіндегі бірінші туындыны табайық:

$$\frac{df}{dx}\Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

$O(\Delta x)$  белгіленуі енді келесі қосылғыштардың ең кіші реті бірге тең екендігін білдіреді. Қатарға жіктегенде пайда болатын осы қосымшаны алып тастап, бірінші туынды үшін жуықталған өрнекті аламыз:

$$\frac{df}{dx}\Big|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}. \quad (2.3)$$

Бұл өрнек «*алға*» шекті-айырымды қатынасы немесе бірінші туындының оң жақты шекті-айырымды аппроксимациясы деп аталады. (2.3) теңдеу бірінші туындыны  $\Delta x$  аппроксимация қателігімен аппроксимациялайды, яғни теңдеу *бірінші ретті дәлдікке ие*.

Туынды үшін шекті-айырымды өрнекті алу үшін  $f(x)$  функциясын  $x_{i-1}$  нүктесінде Тейлор қатарына жіктеуге болады:

$$f_{i-1} = f_i - \frac{df}{dx}\Big|_i \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_i \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (2.4)$$

Осыдан мынаны шығарып аламыз:

$$\frac{df}{dx}\Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

немесе

$$\frac{df}{dx}\Big|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}. \quad (2.5)$$

Бұл өрнек «*артқа*» шекті-айырымды қатынасы немесе бірінші туындының *сол жақты шекті-айырымды аппроксимациясы* деп аталады. (2.5) өрнегі (2.3) өрнек сияқты бірінші ретті дәлдікке ие.

Туынды үшін шекті-айырымды схеманы  $f(x)$  функциясын Тейлор қатарына жіктеу арқылы алудың тағы бір үшінші әдісі бар. Ол үшін (2.2) өрнегінен (2.4) өрнекті мүшелеп алып тастаймыз:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2 \frac{df}{dx}\Big|_i \Delta x + \frac{1}{3} \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_i \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^5).$$

Осы жерден туындыны анықтаймыз:

$$\frac{df}{dx}\Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_i \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

немесе

$$\frac{df}{dx}\Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Жоғарыдағы теңдеуден жуықталған өрнекті аламыз:

$$\frac{df}{dx}\Big|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (2.6)$$

Бұл өрнек *орталық шекті-айырымды қатынас* деп аталады және (2.3) пен (2.5) өрнектерге қарағанда *екінші ретті дәлдікке ие*, өйткені, бұл өрнекті қорытып шығару барысында екінші ретті мүшелер ескерілмеді.

Осылайша, бірінші туынды үшін біз үш түрлі жуықталған өрнектерді алдық. Бір қарағанда аталған үш теңдеудің бір-бірінен айырмашылығы жоқ сияқты көрінгенімен, шын мәнінде  $i$  нүктесінде олар бірінші туынды үшін бірнеше есеге дейін айырмашылығы бар мәндерді беруі мүмкін. Әсіресе, бұл жағдай  $f$  күрт өзгертін аймақта айқын көрінеді. Ең дәл мәндерді (2.6) орталық шекті-айырымды қатынас береді, өйткені, оның дәлдігінің реті жоғары. Дегенмен де (2.6) өрнек әрқашанда жақсы нәтиже бере бермейді, тіпті, кейде шекті-айырымды схеманың орнықсыздығына алып келуі мүмкін.

Ал дәлдігі аз (2.3) немесе (2.5) өрнектерін таңдау кейде жемісті нәтижелер беруі мүмкін. Қарапайым туындыны (бір ғана айнымалыға тәуелді функциядан алынған бірінші ретті туынды) шекті айырымдармен бейнелеуде белгілі бір таңдау болатындығына көз жеткіздік. Осының салдарынан шекті-айырымды схемалардың түрлі нұсқалары шығатынын көруге болады.

Ендігі кезекте  $f(x)$  функциясын Тейлор қатарына бесінші мүшеге дейін жіктеудің екі нұсқасын пайдалана отырып, екінші туындының шекті-айырымды схемасын шығарайық:

$$f_{i+1} = f_i + \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 + \left. \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i \Delta x^3 + \left. \frac{1}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) .$$

$$f_{i-1} = f_i - \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 - \left. \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i \Delta x^3 + \left. \frac{1}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) .$$

Осы екі өрнекті бір-біріне мүшелеп қосайық:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 + \left. \frac{1}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) .$$

Осыдан:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 + \left. \frac{1}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5)$$

немесе нәтижесінде жазсақ:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2} \quad (2.7)$$

Бұл өрнек (2.6) теңдеуге ұқсас **екінші ретті дәлдікке** ие, өйткені, оны шығару барысында екінші ретті мүшелер алынып тасталған болатын.

Шекті-айырымды аппроксимация ұғымын дербес туындыларға да қолдануға болады. Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$f_{ij} = f(x_i, y_j), \quad f_{i,j,k} = f(x_i, y_j, z_k), \quad f_{i,j,k}^n = f(t_n, x_i, y_j, z_k).$$

Бір айнымалыға тәуелді функция үшін жазылған өрнектерге ұқсас Тейлор қатарына жіктей отырып, дербес туындылар үшін төмендегі шекті-айырымды қатынастарды алуға болады:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_i \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \text{ және т.б.}$$

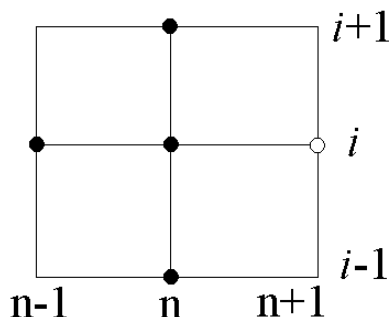


Енді бірінші туындылардың аппроксимациясы үшін орталық айырымды қатынастарды таңдап ала отырып, (2.1) теңдеуді шекті айырымдармен өрнектеп жазайық:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}. \quad (2.8)$$

Бұл өрнек екінші ретті дәлдікке ие. Шаблонның бейнесін салу арқылы (3-сурет), оның үш қабатты бес нүктелік схема екендігіне оңай көз жеткізуге болады. Мұндағы белгісіз - уақыт бойынша оң жақ қабаттағы  $f$  функциясының мәні, яғни  $f_i^{n+1}$ , оны (2.8) өрнектен оңай анықтауға болады:

$$f_i^{n+1} = f_i^{n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n)$$



3-сурет. Үш қабатты бес нүктелік схема

Алайда, тәжірибеде мұндай схеманы пайдалану ұтымды емес. Барлық мүмкін болатын  $\Delta t > 0$  үшін бұл схема сандық орнықсыз, яғни бастапқы (2.1) дифференциалдық теңдеудің шешімімен ешқандай ортақтығы жоқ, хаустық шешімдердің тууына алып келеді.

Егер бейстационар мүшедегі орталық айырымдардың орнына уақыт бойынша алға айырымдарын қолданатын болсақ, онда жоғарыдағы қайшылықтан құтылуға мүмкіндік туады. Бұл жағдайда келесі шекті-айырымды схеманы аламыз:

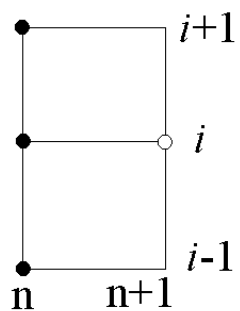
$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2} \quad (2.9)$$

немесе

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n) \quad (2.10)$$

Әрі қарай біз бұл схеманың кем дегенде  $\Delta t$  және  $\Delta x$  қатысты кейбір жағдайларда орнықты болатындығын дәлелдейміз. Сонымен қатар (2.8) өрнекке қарағанда бұл схеманың дәлдігі азырақ: ол уақыт бойынша бірінші

ретті және кеңістіктік айнымалылар бойынша екінші ретті дәлдікке ие. Шаблоннан көрініп тұрғандай (4-сурет), бұл - екі қабатты төрт нүктелік схема.



4-сурет. Екі қабатты төрт нүктелік схема

## Лекция 4

### **Дифференциалдық теңдеулерді шекті айырымдармен бейнелеу әдістері. Полиномды аппроксимация әдісі. «Алға», «артқа» және «орталық» шекті-айырымды сызбалары**

Шекті-айырымды қатынастарды алудың тағы бір әдісі параметрлері бар аппроксимациялайтын аналитикалық функцияны қолданудың негізінде жатыр. Бұл функция тор түйіндеріндегі мәндер арқылы тұрғызылып, содан соң аналитикалық жолмен дифференциалданады. Бұл тәжіри-белік мәліметтер бойынша туындыларды анықтаудың қарапайым әдісі болып табылады. Идеал түрде аппроксимациялайтын функцияның түрі жуықталған аналитикалық шешіммен анықталуы тиіс, алайда, әдетте, аппроксимациялаушы функциялар ретінде полиномдар пайдаланылады. Осы әдісті біз параболалық аппроксимация мысалында көрсететін боламыз.

$f$  функциясының мәндері  $i-1$ ,  $i$  және  $i+1$  нүктелерінде берілген деп жорамалдап,  $f(x)$  функциясына параболалық аппроксимация жүргізейік:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (2.11)$$

Бірінші және екінші туындыларды анықтайық:

$$\frac{df}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 + \dots \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2c + 6dx + \dots \quad (2.13)$$

Жеңіл болу үшін санақ басы ретінде ( $x = 0$ )  $i$  нүктесін алайық. Онда  $i-1$ ,  $i$  және  $i+1$  нүктелерінде жазылған (2.11) өрнектен мынау шығады:

$$f_{i-1} \approx a - b\Delta x + c\Delta x^2 - d\Delta x^3, \quad (2.14)$$

$$f_i \approx a, \quad (2.15)$$

$$f_{i+1} \approx a + b\Delta x + c\Delta x^2 + d\Delta x^3. \quad (2.16)$$

(2.14) пен (2.16) өрнектерді қосу арқылы мынаны аламыз:

$$f_{i-1} + f_{i+1} \approx 2a + 2c\Delta x^2.$$

(2.15) ескере отырып,  $c$ -ны табамыз:

$$c \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{2\Delta x^2}.$$

(2.16) өрнектен  $b$  мәнін анықтаймыз:

$$b \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}.$$

$i$  нүктесінде ( $x=0$  болғанда) (2.12) өрнектегі бірінші туындының мәні мынаған тең болады:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = b \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (2.17)$$

Ал (2.13) өрнектегі  $i$  нүктесіндегі екінші туындының мәні былайша анықталады:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = 2c \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}. \quad (2.18)$$

(2.17) және (2.18) өрнектер Тейлор қатарына жіктеудің нәтижесінде шыққан (2.6) және (2.7) теңдеулерімен жақсы сәйкес келеді. Егер  $f$  — бірінші дәрежелі полином деп есептесек, яғни:

$$f(x) = a + bx + \dots,$$

онда  $a$  мен  $b$  анықтау үшін қандай мәндер -  $f_i$  және  $f_{i+1}$  немесе  $f_i$  және  $f_{i-1}$  қолданылатындығына байланысты бірінші туынды үшін сәйкесінше «алға» немесе «артқа» айырымдары бар өрнектерді шығарып алуға болады.  $f$  функциясын сызықты аппроксимациялағанда екінші туынды үшін өрнекті шығара алмайтындығымыз анық.

Реттілігі жоғары туындылар үшін айырымды өрнектер жоғары ретті полиномдарды қолданудың негізінде алынады. Реттілігі екіден көп полиномдар үшін алынған өрнектер Тейлор қатарына жіктеуден алынған теңдеулерге ұқсамайды және әрбір жағдайда аппроксимация қателігі Тейлор қатарына жіктеу арқылы тексерілуі тиіс. Есептелетін жылуфизикада полиномды аппроксимация әдісі әдетте шекараға жақын маңайдағы туындылардың мәндерін алу үшін ғана пайдаланылады.

Полиномды аппроксимацияның кемшілігі – аппроксимация реті артқан сайын олар «шуылдарға», яғни мәліметтердің кездейсоқ таралған қателіктеріне сезімтал бола бастайды.

## Лекция 5

Дифференциалдық теңдеулерді шекті айырымдармен бейнелеу әдістері.  
Аралас туынды үшін шекті-айырымды сызбаны қорыту. Теңдеудің  
шаблонын тұрғызу

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

$$\begin{aligned} f_{i+1,j+1} &= f_{i,j} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} \Delta y^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f_{i+1,j-1} &= f_{i,j} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x - \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} \Delta y^2 - \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_{i-1,j+1} &= f_{i,j} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} \Delta y^2 - \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (3)$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (4)$$

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} = 2 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (5)$$

$$f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} = -2 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (6)$$

(5)+(6):

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (1)$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \Delta y^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (2)$$

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} = 2 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (5)$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \Delta y^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (3)$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (4)$$

$$f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} = -2 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (6)$$

## Лекция 6

### **Дифференциалдық теңдеулерді шекті-айырымдармен бейнелеу әдістері. Шекті-айырымдар теориясын қолдана отырып, екінші ретті туынды үшін шекті-айырымды сызбаны қорыту**

Ендігі кезекте  $f(x)$  функциясын Тейлор қатарына бесінші мүшеге дейін жіктеудің екі нұсқасын пайдалана отырып, екінші туындының шекті-айырымды схемасын шығарайық:

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 + \\ &+ \left. \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i \Delta x^3 + \left. \frac{1}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) . \\ f_{i-1} &= f_i - \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 - \\ &- \left. \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i \Delta x^3 + \left. \frac{1}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) . \end{aligned}$$

Осы екі өрнекті бір-біріне мүшелеп қосайық:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 + \left. \frac{1}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) .$$

Осыдан:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 + \left. \frac{1}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5)$$

немесе нәтижесінде жазсақ:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2} \quad (2.7)$$

Бұл өрнек (2.6) теңдеуге ұқсас **екінші ретті дәлдікке** ие, өйткені, оны шығару барысында екінші ретті мүшелер алынып тасталған болатын.

Шекті-айырымды аппроксимация ұғымын дербес туындыларға да қолдануға болады. Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$f_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad f_{i,j,k} = f(x_i, y_j, z_k), \quad f_{i,j,k}^n = f(t_n, x_i, y_j, z_k).$$

Бір айнымалыға тәуелді функция үшін жазылған өрнектерге ұқсас Тейлор қатарына жіктей отырып, дербес туындылар үшін төмендегі шекті-айырымды қатынастарды алуға болады:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_i \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad \text{және т.б.}$$

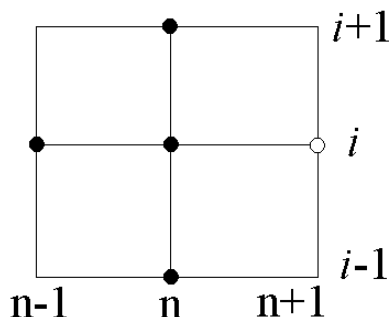


Енді бірінші туындылардың аппроксимациясы үшін орталық айырымды қатынастарды тандап ала отырып, (2.1) теңдеуді шекті айырымдармен өрнектеп жазайық:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}. \quad (2.8)$$

Бұл өрнек екінші ретті дәлдікке ие. Шаблонның бейнесін салу арқылы (3-сурет), оның үш қабатты бес нүктелік схема екендігіне оңай көз жеткізуге болады. Мұндағы белгісіз - уақыт бойынша оң жақ қабаттағы  $f$  функциясының мәні, яғни  $f_i^{n+1}$ , оны (2.8) өрнектен оңай анықтауға болады:

$$f_i^{n+1} = f_i^{n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n)$$



3-сурет. Үш қабатты бес нүктелік схема

Алайда, тәжірибеде мұндай схеманы пайдалану ұтымды емес. Барлық мүмкін болатын  $\Delta t > 0$  үшін бұл схема сандық орнықсыз, яғни бастапқы (2.1) дифференциалдық теңдеудің шешімімен ешқандай ортақтығы жоқ, хаустық шешімдердің тууына алып келеді.

Егер бейстационар мүшедегі орталық айырымдардың орнына уақыт бойынша алға айырымдарын қолданатын болсақ, онда жоғарыдағы қайшылықтан құтылуға мүмкіндік туады. Бұл жағдайда келесі шекті-айырымды схеманы аламыз:

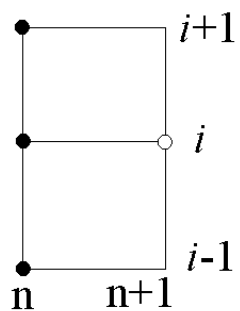
$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2} \quad (2.9)$$

немесе

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n) \quad (2.10)$$

Әрі қарай біз бұл схеманың кем дегенде  $\Delta t$  және  $\Delta x$  қатысты кейбір жағдайларда орнықты болатындығын дәлелдейміз. Сонымен қатар (2.8) өрнекке қарағанда бұл схеманың дәлдігі азырақ: ол уақыт бойынша бірінші

ретті және кеңістіктік айнымалылар бойынша екінші ретті дәлдікке ие. Шаблоннан көрініп тұрғандай (4-сурет), бұл - екі қабатты төрт нүктелік схема.



4-сурет. Екі қабатты төрт нүктелік схема

## Лекция 7

**Дифференциалдық теңдеулерді шекті-айырымдармен бейнелеу әдістері.  
Үшінші ретті туынды үшін шекті-айырымды сызбаны қорыту**

## Лекция 8

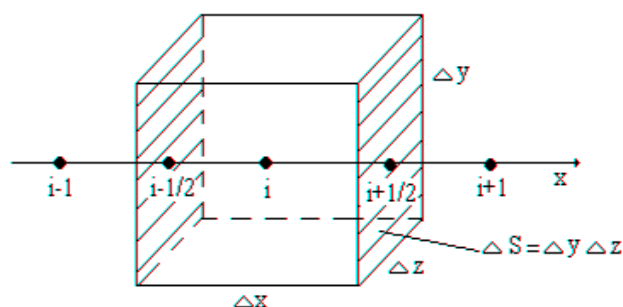
### Дифференциалдық теңдеулерді шекті-айырымдармен бейнелеу әдістері. Бақыланған көлем бойынша интегралдау әдісі

#### Бақылау сұрақтары:

1. Біртекті тордың біртекті емес тордан айырмашылығы неде?
2. Тор функциясы дегеніміз не?
3. Шекті айырымды схема деген не?
4. Шаблон дегеніміз не?
5. Бірінші туынды үшін оң жақты шекті-айырымды қатынасты жазыңыз.
6. Бірінші туынды үшін сол жақты шекті-айырымды қатынасты жазыңыз.
7. Бірінші туынды үшін орталық шекті-айырымды қатынасты жазыңыз.
8. Екінші туынды үшін шекті-айырымды қатынасты жазыңыз.
9. Осы 4 – шекті-айырымды қатынастың қайсысы бірінші ретті дәлдікке ие.

Тағы да (2.1) өрнекті қарастырайық. Оны шекті-айырымды түрде бейнелеу үшін осы теңдеудің барлық мүшелерін уақыт бойынша  $t_n$  – нан  $t_{n+1}$  – ге дейін (немесе біздің белгілеуімізде  $n$ -нен  $n+1$ -ге дейін) және кеңістік бойынша  $x_{i-1/2}$  – ден  $x_{i+1/2}$  –ге дейін интегралдап шығайық.  $t$  және  $x$  айнымалылары тәуелсіз болғандықтан, интегралдау реті маңызды емес, сондықтан оны бір ғана нақты интегралдау жүргізуге болатындай етіп таңдап аламыз:

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_n^{n+1} \frac{\partial f}{\partial t} dt dx + \int_n^{n+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} u \frac{\partial f}{\partial x} dx dt = \int_n^{n+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dt$$



5-сурет

Бірінші интегралдаудың нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} (f^{n+1} - f^n) dx + u \int_n^{n+1} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) dt =$$

$$= a \int_n^{n+1} \left( \frac{df}{dx} \Big|_{i+1/2} - \frac{df}{dx} \Big|_{i-1/2} \right) dt$$

Енді бізге жақсы таныс «орташа туралы» теореманы пайдаланайық:

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z) dz \approx f(z^*) \Delta z,$$

мұндағы  $\Delta z = z_{k+1} - z_k$ ,  $z^* \in [z_k, z_{k+1}]$ .

Интегралдарды есептеу барысында координата бойынша орташа нүкте ретінде  $x_i$ , ал уақыт бойынша  $t_n$  соңғы сол жақтағы нүктені ала отырып мынаны шығарамыз:

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) \Delta x + u (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) \Delta t =$$

$$= a \left( \frac{df}{dx} \Big|_{i+1/2}^n - \frac{df}{dx} \Big|_{i-1/2}^n \right) \Delta t \quad (2.19)$$

Бұл теңдеудің оң жағындағы туындылар үшін шекті-айырымды қатынастарды мынадай тәсілмен анықтаймыз.

$$\frac{df}{dx} \text{-ті } x \text{ бойынша интегралдаймыз:}$$

$$\int_i^{i+1} \frac{df}{dx} \Big|_x^n dx = f_{i+1}^n - f_i^n. \quad (2.20)$$

Екінші жағынан, егер орташа нүкте ретінде  $[x_i, x_{i+1}]$  интервалынан  $x_{i+1/2}$  нүктесін алар болсақ, «орташа туралы» теорема бойынша жоғарыдағы интегралдың жуық мәні былайша болады:

$$\int_i^{i+1} \frac{df}{dx} \Big|_x^n dx \approx \frac{df}{dx} \Big|_{i+1/2}^n \Delta x. \quad (2.21)$$

(2.20) мен (2.21) теңдеулерінің оң жақтарын теңестіре отырып, мынаны аламыз:

$$\frac{df}{dx} \Big|_{i+1/2}^n \Delta x \approx f_{i+1}^n - f_i^n,$$

осыдан:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{i+1/2}^n \approx \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}. \quad (2.22)$$

Дәл осылайша  $x_{i-1/2}$  түйініндегі туынды үшін теңдеуді де алуға болады:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{i-1/2}^n \approx \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (2.23)$$

$f_{i+1/2}$  мен  $f_{i-1/2}$  мәндерін  $f$  шамасының көрші түйіндердегі орташа арифметикалық мәндерімен алмастырамыз:

$$f_{i\pm 1/2} = (f_{i\pm 1} + f_i)/2. \quad (2.24)$$

(2.22)-(2.24) теңдеулерін (2.19) өрнекке апарып қойып, мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} & (f_i^{n+1} - f_i^n)\Delta x + \frac{u}{2}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)\Delta t = \\ & = a \left( \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} - \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \right) \Delta t, \quad (2.25) \end{aligned}$$

осы өрнектен барлық теңдеуді  $\Delta x \Delta t$  көбейткішіне мүшелеп бөліп, түйіндестерін жазсақ, келесі соңғы шекті-айырымды теңдеуді аламыз:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}, \quad (2.26)$$

бұл теңдеу (2.9) өрнекпен дәл келеді. Мұндай ұқсастыққа біз сәйкесінше интегралдау шектерін қою арқылы қол жеткіздік.

Жалпы алғанда Тейлор қатарына жіктеу сияқты интегралдау әдісінде де шекті-айырымды теңдеулерді шығару барысында интегралдау жүргізіліп отырған көлемді таңдауға байланысты айырмашылықтар болады. Интегралдық әдіс пен Тейлор қатарына жіктеу арасындағы ерекшелік тікбұрышты емес координата жүйесін қолдану кезінде айқын көрінеді.

Осылайша жоғарыда қарастырылған үш әдіс те бірдей шекті-айырымды өрнектер беруі мүмкін. Бұл барлық әдістерге деген сенімді нығайта түседі. Бірақ, олардың әрбірін таңдауға мүмкіндік бар. Шынында да, бір ғана дифференциалдық теңдеудің ақиқатқа жақын бірнеше шекті-айырымды ұқсас схемалары болуы мүмкін. Алайда, олардың барлығы жүзеге аса бермейді.

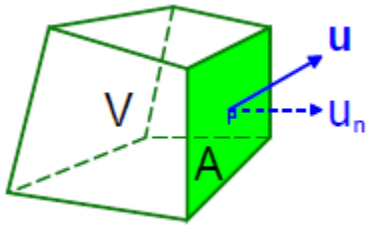
## Лекция 9

**Бақыланған көлем әдісін қолдана отырып, екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді қорыту. Навье-Стокс теңдеулер жүйесіндегі үзіліссіздік (массаның сақталу заңы) және қозғалыс (импульстің сақталу заңы) теңдеулерін қорыту**

### Массаның сақталу заңын қорыту

Жүйедегі массаның сақталу теңдеуі бақыланған көлемдегі барша масса көлемі мен ондағы кірген-шыққан ағындардың қорытынды суммасымен теңгеріледі. Яғни, бақыланған көлемдегі массаның өзгерісі мен ондағы кірген-шыққан ағындардың тығыздығы тұрақты болып қалады.

$$\frac{d}{dt}(\text{mass}) + \sum_{\text{faces}} (\text{mass flux}) = 0$$

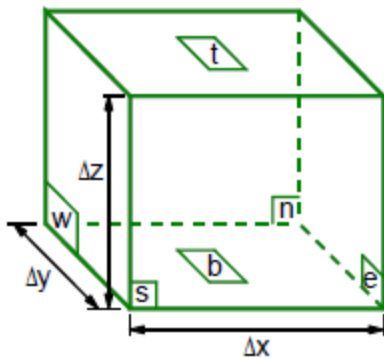


Көлемі V болатын бақыланған көлемдегі және S бетке бағытталатын ағындар бойынша:

Бақыланған көлемдегі сұйық массасы:  $\rho V$

Бір бет бойымен масса ағының тығыздығы:  $Q = \rho u S$  - секундтық шығын деп те аталады.

Массаның сақталу заңын берілген жүйені ұсақ бақыланған көлемдерге жіктеу арқылы сипаттаймыз және қорытамыз.



$$\underbrace{\frac{d(\rho V)}{dt}}_{\text{rate of change of mas}} + \underbrace{(\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho v A)_n - (\rho v A)_s + (\rho w A)_t - (\rho w A)_b}_{\text{net outward mass flux}} = 0$$

$V = \Delta x \Delta y \Delta z$  белгілеу енгізе отырып,

$$\frac{d(\rho\Delta x\Delta y\Delta z)}{dt} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w]\Delta y\Delta z + [(\rho v)_n - (\rho v)_s]\Delta z\Delta x + [(\rho w)_t - (\rho w)_b]\Delta x\Delta y = 0$$

Теңдеудің екі жағын көлемге бөліп:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_n - (\rho v)_s}{\Delta y} + \frac{(\rho w)_t - (\rho w)_b}{\Delta z} = 0$$

Математикалық талдау бөлімінен белгілі білімімізді қолдана отырып, яғни  $\lim \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- берілген теңдеу жалпы жүйе үшін массаның сақталу заңы немесе үзіліссіздік теңдеуі деп аталады.

Егер жүйе (сұйық) сығылмайтын болса,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

### Импульстің сақтау заңын қорыту

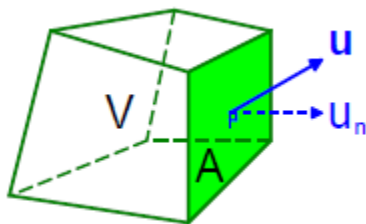
Ньютонның екінші заңы бойынша жүйедегі импульстің өзгерісі күштерге тәуелді болады:  $p = m \times v$

Бақыланған көлемдегі импульстің өзгерісі мен ондағы кірген шыққан ағындардың тығыздығы жүйеге әсер ететін күштермен теңгеріледі:

$$\frac{d}{dt}(mass \times \mathbf{u}) + \sum_{faces} (mass\ flux \times \mathbf{u}) = \mathbf{F}$$

Бақыланған көлемдегі импульс моменті:  $(\rho V)\bar{u}$

Беттер бойынша ағындардың тығыздығы:  $(\rho V S)\bar{u}$



Импульстің сақталу заңын қорытпас бұрын жүйеге әсер ететін күштерге тоқталып өтейік.

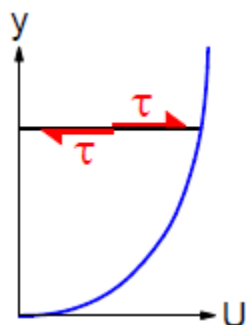
Жүйеге әсер ететін күштер екі топқа жіктеледі:

1. беттік күштер (бетк тура пропорционал, бақыланған көлемнің бетіне қарай бағытталады);
2. денелік күштер (көлемге тура пропорционал).

Беттік күштерге жататындар:



1. қысым күші  $p$  – бетке нормаль бағытталады;
2. үйкеліс күші  $\tau$  - екі салыстырмалы қозғалыс арасында қалыптасады;



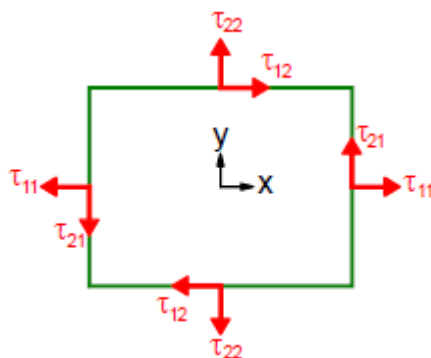
$$\tau \equiv \tau_{12} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Үйкеліс күші Ньютон заңымен сипатталады:

$$\tau_{12} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

немесе , немесе тензор түрінде жазатын болсақ,

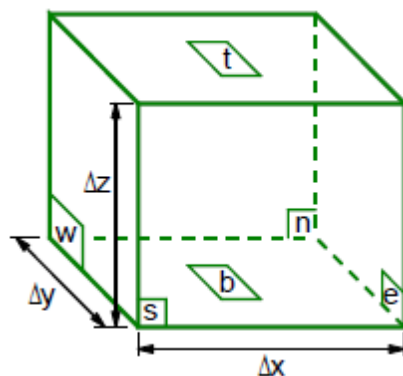
$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$



Денелік күшке ауырлық күшін жатқызуға болады, яғни бақыланған көлеміміз



бірлік көлем болатындықтан:  $\rho g$



$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\rho V u)}_{\text{rate of change of momentum}} + \underbrace{(\rho u A)_e u_e - (\rho u A)_w u_w + (\rho v A)_n u_n - (\rho v A)_s u_s + (\rho w A)_t u_t - (\rho w A)_b u_b}_{\text{net outward momentum flux}}$$

$$= \underbrace{(p_w A_w - p_e A_e)}_{\text{pressure force in x direction}} + \text{viscous and other forces}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z u) + [(\rho u)_e u_e - (\rho u)_w u_w] \Delta y \Delta z + [(\rho v)_n u_n - (\rho v)_s u_s] \Delta z \Delta x + [(\rho w)_t u_t - (\rho w)_b u_b] \Delta x \Delta y$$

$$= (p_w - p_e) \Delta y \Delta z + \text{viscous and other forces}$$

Теңдеудің екі жағын көлемге бөліп:

$$\frac{d(\rho u)}{dt} + \frac{(\rho u u)_e - (\rho u u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho v u)_n - (\rho v u)_s}{\Delta y} + \frac{(\rho w u)_t - (\rho w u)_b}{\Delta z} = -\frac{(p_e - p_w)}{\Delta x}$$

$$+ \text{viscous and other forces}$$

Яғни,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \text{other forces}$$

- жалпы

жағдай үшін импульстің сақталу заңы немесе қозғалыс теңдеулері

Мұндағы

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{Лаплас операторы}$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \text{тұтқыр} \quad \text{кернеу} \quad \text{тензоры} \quad \text{немесе}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

Егер сұйық сығылмайтын болса:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + f_i$$

## Лекция 10

### **Айырымды сызбалардың орнықтылығы. Аппроксимация, орнықтылық және айырымды сызбалардың үйлесімділігі ұғымдары. Орнықсыздықты бейнелеу. Динамикалық және статикалық орнықтылық**

*Үйлесетін шекті-айырымды схема математикалық тұрғыдан тор қадамдары нөлге ұмтылған кезде шешімі дифференциалдық теңдеудің шешіміне ұмтылатын шекті-айырымды схеманы берді.*

Бұл тұжырым бір қарағаннан өте сезімтал болуы мүмкін. Ол тек туындының анықтамасының басқаша үндесуі емес; мұнда шек деген ұғымның астарында дифференциалдық теңдеудің жеке мүшелерінің (туындыларының) емес, барлық шешімінің шегі жатыр. Бұл қасиет *аппроксимация* деп аталады. Мысалы, дифференциалдық теңдеудің шекті-айырымды нұсқасы әрбір мүшесі дифференциалдық теңдеудің сәйкес мүшесін аппроксимациялайтын шекті айырымдардан тұруы мүмкін. Ал жалпы алғанда бұл нұсқа үйлеспейтін болуы мүмкін.

Шекті-айырымды схема мен бастапқы дифференциалдық есептің жақындығы байланыс-сыздықтың шамасымен бағаланады. Бұл байланыссыздық дәл шешімді теңдеуге және шекті-айырымды есептің шекаралық шарттарына апарып қойғанда пайда болады.

Есептің құрамына кіретін барлық теңдеулердің жиынтығын (негізгі дифференциалдық теңдеу мен шекаралық және бастапқы шарттар) келесі оператор арқылы жазайық:

$$L(f)=0, \tag{3.1}$$

мұндағы  $f$  — (3.1) теңдіктің дәл шешімі.

Сәйкесінше шекті-айырымды есепті операторлар арқылы келесі түрде жазуға болады:

$$L_{\Delta}(f_{\Delta})=0, \tag{3.2}$$

мұндағы  $f_{\Delta}$  — (3.2) шекті-айырымды есептің шешімі болатын тор функциясы.

*(3.1) есептің нақты шешіміндегі (3.2) шекті-айырымды схеманың **аппроксимация қателігі (немесе байланыссыздық)** деп  $\alpha_{\Delta}=L_{\Delta}(f)$  шекті-айырымды схемасын айтады.*

*Егер тор қадамдары нөлге ұмтылғанда аппроксимация қателігі де нөлге ұмтылса, онда схема **нақты шешімдегі аппроксимациялайтын схема** деп аталады.*

Бірөлшемді жағдай үшін жоғарыдағы анықтаманы мына түрде жазуға болады:

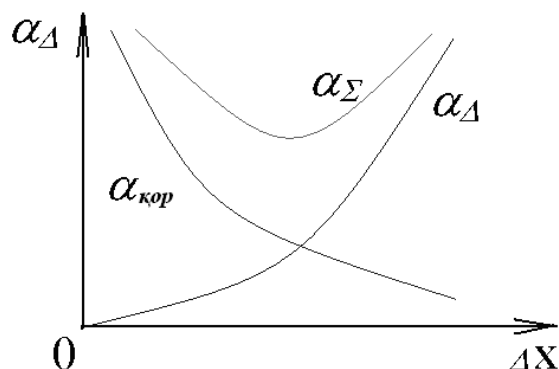
$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ болғанда } \alpha_{\Delta} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

Екі өлшемді жағдайда  $\Delta t$  қадамы ереже бойынша  $\Delta x$  қадамымен байланысқан және  $\Delta x \rightarrow 0$  болғанда  $\Delta t \rightarrow 0$  орындалады, сондықтан (3.3) шарт екіөлшемді есеп үшін де орындала береді. Аппроксимациялайтын схема үшін аппроксимация қадамы  $\Delta x$  аз болған сайын аппроксимация қателігі де кем болады. Екіөлшемді есеп үшін қадамдардың уақыт және кеңістіктік айнымалы бойынша үйлесімді кему заңы орындалады.

Мысалы,  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = const$  шарты орындалған жағдайда схема дәл шешімге

алып келмеуі мүмкін, ал  $\frac{\Delta x^2}{\Delta t} = const$  болғанда үйлесімді болуы мүмкін.

Сандық есептеу барысында аппроксимация қателігінен өзге жуықтау қателіктері болуы мүмкін. Олар тор қадамы кеміген сайын керісінше артып отырады (яғни, қадамдардың саны артқан сайын). Аппроксимация мен жуықтау қателіктерінің белгілі бір заңдылықпен өсуі 6-суретте келтірілген.



6-сурет. Аппроксимация мен жуықтау қателіктерінің артуы

Суреттен көрініп тұрғанындай,  $\alpha_{\Delta} \rightarrow 0$  болғанда жуықтау қателіктері артып кетуі мүмкін, сондықтан шекті-айырымды схема аппроксимациялайтын болуы, бірақ, үйлесімді болмауы мүмкін.

Аппроксимациялайтын және үйлесетін схемаларды ажырата білген жөн. Үйлесімділік шартын келесі жолмен жазуға болады:

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ болғанда } f_{\Delta} \rightarrow f,$$

ал аппроксимация шарты (3.3) түріндей болады.  $f - f_{\Delta}$  шамасын (3.2) теңдеуінің оң жағындағы кіші ауытқудың салдарынан болған тор есебі шешімінің ауытқуы ретінде қарастыруға болады.

*Аппроксимация қасиетінен (яғни,  $\alpha_\Delta$  нөлге ұмтылуынан) үйлесімділік (яғни,  $f - f_\Delta$  нөлге ұмтылуы) туындауы қажет болса, схеманың кіші ауытқуларға қатысты орнықты болуын қосымша талап ету жеткілікті.*

## Лекция 11

**Орнықтылық ұғымын тәжірибелік дифференциалдық теңдеулер үшін математикалық өрнегін қорыту. Шаблоннан түйіндерді таңдап алу.**

(2.1) модельдік теңдеуін қарастырайық:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Уақыт бойынша алға айырымдары және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырымдары бар шекті-айырымды схема мынадай түрге ие:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}.$$

Ықшамды болу үшін әрі қарай  $u_i^n$  орнына қарапайым  $u$  жазамыз. Осы теңдеуді мынадай жолмен түрлендіріп жазайық:

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} - f_i^n &= -\frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \\ &+ \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Келесі белгілеулерді енгізейік:

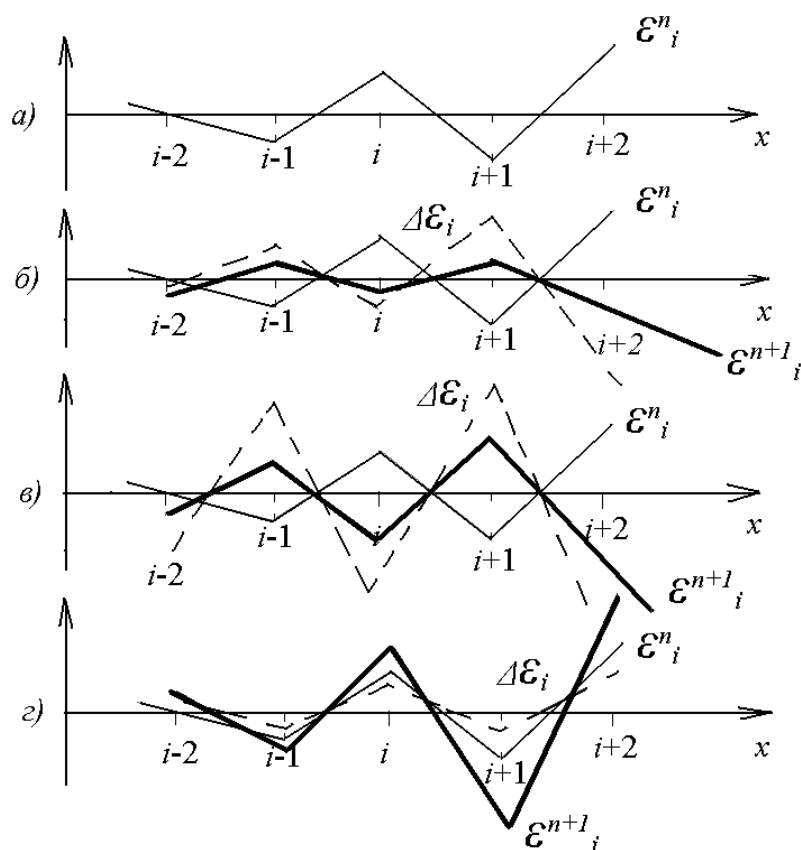
$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \text{ — Курант саны,}$$

$$d = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \text{ — диффузиялық сан.}$$

Осыдан кейін (3.4) өрнек былайша жазылатын болады:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + d (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n). \quad (3.5)$$

$n$ -ші қабатта уақыт бойынша 7,  $a$  суреттегідей  $\varepsilon_i^n$  кіші ауытқу пайда болды делік.



7-сурет. Шекті-айырымды схемалар

$\varepsilon_i^n$  шамасы нүктеден нүктеге дейін арта береді және көрші түйіндерде әр түрлі таңбаға ие болады. Мұндай ауытқулар жуықтау қателіктерінің салдарынан немесе нақты екіөлшемді есептегі көлденең қозғалыстың әсерінен туындауы мүмкін.  $n$ -ші қабатта пайда болған ауытқу міндетті түрде  $(n+1)$ -ші қабатта да байқалады. Егер келесі уақыттық қабаттардағы ауытқу абсолют мәні бойынша кемитін болса, онда шекті-айырымды схема орнықты болады. Осылайша, берілген жағдайда орнықтылық шарты келесі түрде болады:

$$|\varepsilon_i^{n+1}| \leq |\varepsilon_i^n| \quad \text{немесе:} \quad \left| \frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} \right| \leq 1. \quad (3.6)$$

Ауытқудың дамуын бақылап көрелік. Ол үшін (3.5) теңдеуді  $n$ -ші қабаттағы ауытқуларды ескере отырып жазайық:

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} &= f_i^n + \varepsilon_i^n - \frac{C}{2} [(f_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n) - (f_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n)] + \\ &+ d [(f_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n) + (f_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n) - 2(f_i^n + \varepsilon_i^n)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ауытқулары бар (3.7) теңдеуден «айнымаған» (3.5) өрнекті шегеріп тастаймыз:

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n - \frac{C}{2}(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) + d(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n).$$

Осы жерден  $(n+1)$ -ші қабаттағы ауытқудың өсімшесін анықтайық:

$$\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n = -\frac{C}{2}(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) + d(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n). \quad (3.8)$$

Осы теңдеуді бір ғана диффузиялық мүшесімен қарастыралық, яғни  $C=0$  деп санаймыз:

$$\Delta\varepsilon_i = d(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n). \quad (3.9)$$

Бұл теңдеуді  $i$  нүктесінде талдаймыз:

$$\Delta\varepsilon_i = d(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n) > 0,$$

өйткені,  $\varepsilon_{i+1}^n > 0$ ,  $\varepsilon_{i-1}^n > 0$ ,  $\varepsilon_i^n < 0$ . Сәйкесінше,  $\Delta\varepsilon_i > 0$  және бұл шама  $i$  нүктесіндегі теріс ауытқуды түзетуге ұмтылады. Осыған ұқсас,  $\Delta\varepsilon_{i+1}$  қарастыра отырып, мынаны аламыз:

$$\Delta\varepsilon_{i+1} = d(\varepsilon_{i+2}^n + \varepsilon_i^n - 2\varepsilon_{i+1}^n) < 0,$$

өйткені,  $\varepsilon_{i+2}^n < 0$ ,  $\varepsilon_i^n < 0$ ,  $\varepsilon_{i+1}^n > 0$ , яғни,  $\varepsilon_{i+1}^n$  оң ауытқуы  $\Delta\varepsilon_{i+1}$  теріс өсімшесімен түзетіледі. Осылайша,  $(n+1)$ -ші қабаттағы (7, б-суреттегі үзік сызық) ауытқудың өсімшесі қандай болатындығын бейнелеуге болады.  $\varepsilon_i^n$  мен  $\Delta\varepsilon_i$  шамаларын графикалық тәсілмен қосу арқылы  $n+1$ -ші қабаттағы ауытқудың түрін анықтаймыз (5, б-суреттегі қалың сызық):

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n + \Delta\varepsilon_i.$$

7, б-суреттен көрініп тұрғандай, берілген жағдайда (3.6) орнықтылық шарты орындалады және (3.9) шекті-айырымды теңдеуі орнықты. Алайда, егер  $\Delta t$  қадамы айтарлықтай үлкен болса, онда  $\Delta\varepsilon_{i+1}$  өсімшесінің есебінен енгізілетін түзету де едәуір үлкен болады. Осындай өте үлкен  $\Delta t$  үшін  $\varepsilon_i^{n+1}$  жаңа мәні бастапқы ауытқудан  $\varepsilon_i^n$  көп болады, мұны 7, в-суреттен көруге болады.

*Уақыт бойынша қадамның айтарлықтай үлкен болуының әсерінен туындайтын амплитудасы өспелі мұндай осцилляциялардың пайда болуы динамикалық орнықсыздық деп аталады.*

Динамикалық орнықсыздықтан уақыт бойынша қадамға  $\Delta t$  шектеу қою арқылы құтылуға болады.

Енді (3.8) теңдеуін бір ғана конвективті мүшесімен қарастыралық, яғни  $d=0$  деп есептейміз. Онда (3.8) теңдеуі бұл кезде мынадай түрге енеді:



$$\Delta \varepsilon_i = -\frac{C}{2}(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n). \quad (3.10)$$

$u > 0$  болсын, яғни  $C > 0$ .  $i$  нүктесіндегі ауытқудың өсімшесі мынадай болады:

$$\Delta \varepsilon_i = -\frac{C}{2}(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) < 0,$$

өйткені,  $\varepsilon_{i+1}^n > 0$ ,  $\varepsilon_{i-1}^n > 0$ , бірақ,  $\varepsilon$  амплитуда  $i$  артқан сайын артады, яғни  $\varepsilon_{i+1}^n > \varepsilon_{i-1}^n$ , сәйкесінше, жақша ішіндегі өрнек оң болады. Осылайша, конвекцияға негізделген  $\Delta \varepsilon_i$  өсімшесі  $\varepsilon_i^n$  ауытқуын күшейтеді. Бұл қателіктің монотонды артатындығын білдіреді (7, з-сурет).

*Мұндай өспелі қателіктің пайда болуы статикалық орнықсыздық деп атайды, оны уақыт бойынша қадамды кеміту арқылы жою мүмкін емес. Одан қандай да бір басқа шекті-айырымды схемаға ауысу арқылы құтылуға болады.*

Осылайша, (3.5) теңдеу  $C=0$  болғанда шартты орнықты болса,  $d=0$  болғанда абсолютті орнықсыз болады. Егер бірізгілікте  $C \neq 0$  және  $d \neq 0$  болса, онда конвективті және диффузиялық мүшелер бір-бірімен әсерлесіп, жалпы алғанда (3.5) теңдеу орнықты да, орнықсыз да болуы мүмкін. (3.5) теңдеудің орнықтылығы туралы сауалға жауап беру үшін оны орнықтылыққа төменде көрсетілетін әдістердің бірімен талдау қажет.

## Лекция 12

### Шекті-айырымды сызбаларды орнықтылыққа зерттеу әдістері. Дискретті ауытқулар әдісі

Дискретті ауытқулар әдісінің мәні мынада: теңдеудің әрбір нүктесіне кезекпен  $\varepsilon$  дискретті ауытқу енгізіліп, осы ауытқудың келесі уақыттық қабаттардағы әсері бақыланады. Егер ауытқу артпайтын болса, яғни (3.6) шарт орындалса, шекті-айырымды схема орнықты болады.

Енді (3.5) шекті-айырымды схеманы қарастырайық.  $\varepsilon$  ауытқуды  $(i, n)$  нүктесіне енгізелік:

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = (f_i^n + \varepsilon^n) - \frac{C}{2}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + d[f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2(f_i^n + \varepsilon^n)]$$

Осы ауытқуы бар теңдеуден (3.5) «айнымаған» теңдеуді азайтып, ауытқуға арналған өрнекті аламыз:

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n - 2d\varepsilon^n.$$

Осыдан:

$$\left| \frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n} \right| = |1 - 2d| \leq 1.$$

Алынған теңсіздікті  $d$ -ға қатысты шешу керек:

$$-1 \leq 1 - 2d \leq 1.$$

Осы теңсіздіктің оң және сол жағын жеке қарастырамыз:

а)  $1 - 2d \leq 1 \Rightarrow d \geq 0$  — бұл шарт әрқашанда орындалады.

б)  $-1 \leq 1 - 2d \Rightarrow d \leq 1$  — бұл шарт орындалғанда (3.5) шекті-айырымды схема орнықты.

Тағы бір жайт - осцилляцияны болдырмау мақсатында  $\varepsilon^{n+1}$  мен  $\varepsilon^n$  шамаларының таңбалары бірдей болуын талап еткен жөн, яғни келесі шарт орындалуы тиіс:

$$\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n} \geq 0.$$

Берілген жағдайда бұл шарт келесі теңсіздіктің орындалатындығын білдіреді:

$$1 - 2d \geq 0 \Rightarrow d \leq 1/2.$$

б) қарағанда қатаңдау шектеу алдық, оның құрамына  $d \leq 1$  шарты енеді. Нақты мәндері бар  $\Delta x$  пен  $a$  шамаларында шарт уақыт бойынша қадамға мынадай шектеу қояды:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{a}.$$

Бұл шектеу компьютерде есептеу жүргізу барысында уақытты үнемдеуге қатысты. Мысалы, есеп қандай да бір кеңістіктік  $\Delta x_1$  қадаммен жүргізіледі деп қабылдайық. Уақыт бойынша максимал қадам  $\Delta t_1 = \frac{1}{2} \frac{\Delta x_1}{a}$ . Егер екі есе кіші қадаммен  $\Delta x_2 = \Delta x_1 / 2$  есептеу жүргізу керек болса, онда уақыт бойынша қадам  $\Delta t_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta x_2^2}{a} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta x_1^2}{a} = \frac{1}{4} \Delta t_1$ , яғни уақыт бойынша қадамды 4 есе азайтуға тура келеді, ал компьютерге кететін уақыт жалпы алғанда 8 есеге артады. Екіөлшемді есепте  $\Delta x$  пен  $\Delta y$  қадамдарының екі есеге кемуі жұмсалатын уақытты 16 есе арттырса, үшөлшемді есепте 32 есеге дейін ұлғайып кетеді!

Енді  $\varepsilon$  ауытқуын  $(i+1, n)$  нүктесіне енгізелік:

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2} (f_{i+1}^n + \varepsilon^n - f_{i-1}^n) + d(f_{i+1}^n + \varepsilon^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n).$$

Бұл ауытқуы бар теңдеуден (3.5) «айнымаған» теңдеуді шегеру арқылы ауытқулар үшін жаңа теңдеуді аламыз:

$$\varepsilon^{n+1} = -\frac{C}{2} \varepsilon^n + d \varepsilon^n.$$

Осы жерден орнықтылық шартын жазуға болады:

$$-1 \leq -\frac{c}{2} + d \leq 1$$

$$a) -\frac{c}{2} + d \leq 1 \Rightarrow \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \leq 1,$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u}{2\Delta x}} \quad (3.11)$$

Енді, біз тағы бір орнықтылық шартын шығарып алдық, бұл шарт  $\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u}{2\Delta x} > 0$  мүмкін болған кезде ғана орындалады, өйткені, уақыт бойынша қадам теріс болуы мүмкін.

Соңғы алынған теңсіздікті басқаша жазуға болады:

$$\frac{u\Delta x}{a} < 2.$$

Сол жақтағы мүше Пекле тор санын береді:  $Pe_c = \frac{u\Delta x}{a}$ . Онда соңғы теңсіздікті былайша жазуға болады:

$$Pe_c < 2.$$

Бұл шартты  $x$  бойынша қадамға қойылған шектеу ретінде қабылдауға болады:

$$\Delta x \leq \frac{2a}{u}.$$

Бұл өте қатаң шарт, өйткені, жылу масса тасымалы процестерінің күшеюіне байланысты жылдамдық әдеттегіше артады, сәйкесінше,  $\Delta x$  кемуі тиіс, ал бұл өз кезегінде  $\Delta t$  кемуін талап етеді. Осының салдарынан компьютерлік уақыт шығыны арта түседі.

$$b) -1 \leq -\frac{c}{2} + d$$

немесе

$$\Delta t \left( \frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u}{2\Delta x} \right) \geq -1.$$

$\frac{a}{\Delta x^2} > \frac{u}{2\Delta x}$  болғандықтан жоғарыдағы теңсіздік әрқашанда орындалады.

$(i-1, n)$  нүктесі үшін де дәл осындай талдау жүргізе отырып, мынаны аламыз:

$$\varepsilon^{n+1} = \frac{C}{2} \varepsilon^n + d \varepsilon^n.$$

Осы жерден орнықтылық шарты шығады:

$$-1 \leq \frac{c}{2} + d \leq 1.$$

Жоғарыдағы теңсіздіктің сол жақ бөлігі әрқашанда орындалады және тор қадамдарына ешқандай шектеу қоймайды. Оң жақ бөлігі келесі шартты береді:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{a}{\Delta x^2} + \frac{u}{2\Delta x}}.$$

Бұл шарт (3.11) шартқа қарағанда шектеуді анағұрлым көбірек қояды, сондықтан (3.11) шартын назарға алмауға болады.

Осылайша, (3.5) теңдеу үшін дискретті ауытқулар әдісі келесі үш шартты береді:

$$a) d \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2a}$$

$$б) Pe_c \leq 2 \Leftrightarrow \Delta x \leq \frac{2a}{u}$$

$$в) \Delta t \leq \frac{1}{\frac{a}{\Delta x^2} + \frac{u}{2\Delta x}}.$$

б шартынан мынау шығады:  $u\Delta x < 2a$ , а шартынан:  $2a \leq \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$ .

Сәйкесінше, тағы бір шартты шығарып аламыз:

$$г) \frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1 \Leftrightarrow C < 1.$$

### Лекция 13

#### Шекті-айырымды сызбаларды орнықтылыққа зерттеу әдістері. Фон Нейман әдісі

Бұл әдісті алдыңғы (3.5) шекті-айырымды теңдеу мысалында қарастырайық.  $f_i^n$  тор функциясы Фурье қатарына жіктелген күйінде берілген:

$$f_i^n = V_n e^{li\theta}$$

мұндағы  $V_n - k_x = \frac{2\pi}{\lambda}$  толқындық саны бар  $n$ -ші уақыттық қабаттағы жеке компоненттің амплитудасы,  $\theta = k\Delta x$  – фазалық бұрыш,  $I = \sqrt{-1}$  – жорамал бірлік. Сәйкесінше

$$f_{i\pm 1}^{n+1} = V_{n+1} e^{I(i\pm 1)\theta}$$

Осы өрнектерді (3.5) теңдеуге қоямыз:

$$V_{n+1} e^{i\theta} = V_n e^{i\theta} - \frac{c}{2} V_n (e^{I(i+1)\theta} - e^{I(i-1)\theta}) + d V_n (e^{I(i+1)\theta} + e^{I(i-1)\theta} - 2e^{i\theta})$$

Бұл теңдеуді  $e^{li\theta}$  шамасына бөліп, мынаны аламыз:

$$V_{n+1} = V_n \left[ 1 - \frac{c}{2} (e^{I\theta} - e^{-I\theta}) + d (e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2) \right]$$

$e^{I\theta} + e^{-I\theta} = 2\cos\theta$ ,  $e^{I\theta} - e^{-I\theta} = 2I\sin\theta$  болатындығын ескереміз.

$$V_{n+1} = V_n [1 - 2d(1 - \cos\theta) - IC\sin\theta].$$

Ауысу көбейткішін  $G$  келесі жолмен анықтаймыз:

$$V_{n+1} = G V_n .$$

Шешім орнықты болып қалуы үшін

$$|G| \leq 1. \tag{3.12}$$

теңсіздігі орындалуын талап ету керек.

Берілген жағдайда ауысу көбейткіші мынаған тең:

$$G=1-2d(1-\cos\theta)-C\sin\theta.$$

Ол комплексті шама болғандықтан  $|G|\leq 1$  орнықтылық шарты мынадай теңсіздікпен алмастырылады:

$$[1-2d(1-\cos\theta)]^2-C^2\sin^2\theta\leq 1.$$

Сәйкес түрлендірулерді жасай отырып, мынаны аламыз:

$$C^2(1+\cos\theta)\leq 4d[1-d(1-\cos\theta)].$$

Екі шекті жағдайды қарастырайық:

$$a) \cos\theta=-1: 0\leq 4d(1-2d).$$

Осыдан орнықтылықтың бірінші шартын аламыз:  $d\leq\frac{1}{2}$ .

Дәл осындай шарт дискретті ауытқулар әдісімен де алынған болатын.

$$b) \cos\theta=1: 2C^2\leq 4d\Rightarrow C^2\leq 2d.$$

Алдыңғы теңсіздікті ескере отырып, екінші шартты шығарып аламыз:  $C\leq 1$ .

Осы қос шартты біріктіру арқылы орнықтылық шартының жалпылама түрін алуға болады:

$$\Delta t\leq\frac{2a}{u^2}\text{ немесе }Pe_c\leq 2.$$

Алынған барлық шарттар сызықты теңдеу жағдайында  $u=const$  болғанда ғана орындалады.

## Лекция 14

### **Шекті-айырымды сызбаларды орнықтылыққа зерттеу әдістері. Тәжірибелік орнықтылық әдісі**

Бұл әдіс анағұрлым қарапайымдау, теориялық негізі болмағанымен тәжірибеде жиі қолданылады. *Оның мағынасы шекті-айырымды схеманың коэффициенттері оң болуын, ал олардың қосындысы бірден артық болмауын талап етуде жатыр.*

Ендігі кезекте (3.5) теңдеуін мына түрде қайта жазамыз:

$$f_{i,n+1} = (1 - 2d)f_{i,n} + \left(d - \frac{C}{2}\right)f_{i+1,n} + \left(d + \frac{C}{2}\right)f_{i-1,n}$$

Орнықтылық шарттары былайша жазылады:

$$1 - 2d \geq 0 \Rightarrow d \leq \frac{1}{2};$$

$$d - \frac{C}{2} \geq 0 \Rightarrow C \leq 2d \Rightarrow C \leq 1;$$

$$d + \frac{C}{2} \geq 0 \text{ – әрқашанда орындалады;}$$

$$1 - 2d + d - \frac{C}{2} + d + \frac{C}{2} = 1 \text{ – әрқашанда орындалады.}$$

Біз үш түрлі әдіс арқылы орнықтылықтың бірдей критерийлерін алдық. Мұндай нәтиже тұрақты коэффициенттері бар сызықты дифференциалдық теңдеулер үшін ғана мүмкін болады.

*Үйлесімділік, аппроксимация мен орнықтылық арасындағы байланыстың негізі мынада – шекті-айырымды схеманың үйлесімділігінің қажетті шарттары сәйкес дифференциалдық теңдеудің орнықтылығы мен аппроксимациясынан шығады.* Осы жайтты тағы да атап айтқан жөн.

1952 жылы В.С. Рябенский эквиваленттілік теоремасын жасады. Бұл теорема орнықтылық пен үйлесімділіктің эквивалентті екендігін келесі шарттар орындалған жағдайда анықтайды:

- дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімі бастапқы шарттарға үздіксіз түрде тәуелді болуы тиіс;

- шекті-айырымды теңдеу дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді аппроксимациялауы тиіс;

- орнықсыздық фон Нейман әдісімен анықталуы қажет.

*Осындай талаптар орындалған жағдайда орнықтылықтың қажетті шарты үйлесімділік үшін де жеткілікті бола береді.*

Бейсызық теңдеулер үшін бұл теорема дәлелденбеген, бірақ, тәжірибеде оны бейсызық теңдеулерге де қолдана береді.

Жалпы айтқанда, аппроксимацияның, үйлесімділік пен орнықтылықтың қатаң анықтамаларын  $\Delta x \rightarrow 0$  және  $\Delta t \rightarrow 0$  болғанда зерттеу көп жағдайда



жемісті нәтиже бермейді, өйткені, нақты есептеулер шекті  $\Delta x$  пен  $\Delta t$  мәндерінде жүргізіледі.

**Бақылау сұрақтары:**

1. Аппроксимация қателігі қалай табылады?
2. Қандай шекті-айырымды схема аппроксимирлейтін деп аталады?
3. Қандай шекті айырымды схема үйлесімді деп аталады?
4. Орнықсыздық неден шығады?
5. Курант санын жазыңыз.
6. Диффузиялық санды жазыңыз.
7. Шекті-айырымды схеманың орнықтылық шартын жазыңыз.

## Лекция 15

### **Айқын және айқын емес шекті-айырымды сызбалар. Айқын сызба бойынша есептеу алгоритмі. «Чехарда» айқын сызбасы. «Айқын бұрыш» сызбасы**

#### **Айқын схемалар**

Алдыңғы тарауларда қарастырылған уақыт бойынша алға айырымдары және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырымдары бар шекті-айырымды схема айқын болады, өйткені, бастапқы функцияның мәні уақыттың белгілі бір мезетінде алдыңғы уақыт мезетіндегі шешімдердің мәнімен айқын өрнектеледі.

Жоғарыда көрсетілгендей, айқын шекті-айырымды схема орнықты болуы үшін тор ұяшықтарының өлшемдеріне, яғни  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  қадамдарына белгілі бір шектеулер қойылуы тиіс.

Нақты бір есепті қарастырайық. Оны дұрыс қою үшін берілген теңдеуден өзге шекаралық шарттарды беруіміз қажет.

Құбырда тұрақты  $u$  жылдамдықпен қозғалып бара жатқан ортадағы температураның таралуын анықтау керек болсын. Ортаның бастапқы температурасы  $T_0$ , ал құбырдың шетінде сәйкесінше  $T_1$  және  $T_2$  болады.

Бұл есеп математикалық тұрғыдан былайша бейнеленеді:

$$\frac{df}{dt} + u \frac{df}{dx} = a \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\begin{aligned} t=0, & \quad 0 < x < l: & \quad f=f_0; \\ t \geq 0, & \quad x=0: & \quad f=f_1; \\ & \quad x=l: & \quad f=f_2 \end{aligned}$$

Осы есепті енді шекті-айырымды түрде жазсақ:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}}{\Delta x^2};$$

$$T_{i,1} = T_0, \quad i=2, L-1$$

$$T_{1,n} = T_1, \quad n=1, 2, \dots$$

$$T_{L,n} = T_2, \quad n=1, 2, \dots$$

$\Delta x$  және  $\Delta t$  қадамдарының шамасын бағалау керек.

1) Бұл схема үшін  $\Delta x$  қадамына қойылатын шектеу мынадай түрге ие:

$$\Delta x \leq \frac{2a}{u}.$$

$u=0,1$  м/с болсын (өйткені, ағыс ламинарлық), ал  $a=2 \cdot 10^{-5}$  (ауа үшін).

$$\Delta x \leq \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{10^{-1}} = 4 \cdot 10^{-4} (\text{м}) = 0,4 \text{ мм}.$$

$\Delta x = 4 \cdot 10^{-4}$  м (максимум бойынша) болсын.

Егер  $x$  бойынша кадамды біртекті деп таңдап алатын болсақ, онда  $x$  бойынша кадамдардың жалпы саны (егер  $l=1$  м) мынадай болады:

$$L = \frac{l}{\Delta x} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^4}{4} = 2500.$$

2)  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u}$  (Курант шартынан:  $c \leq 1$ )

$$\Delta t \leq \frac{4 \cdot 10^{-4}}{10^{-1}} = 4 \cdot 10^{-3} \quad (c) = 4 \text{ мс}.$$

Егер  $\Delta t$  баяғыша біртекті болып қала берсе, онда уақыт бойынша кадамдардың жалпы саны мынадай болады (максимал  $\Delta t$  мәнінде):

$$t=1 \text{ с: } N = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = 250$$

$$t=10 \text{ с: } N = \frac{10}{4 \cdot 10^{-3}} = 2500.$$

Осылайша, кадамдардың қатынасы  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$   $u$ -ға тәуелді:  $u$  үлкен болған сайын  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  кемуі түседі.

### Айқын схема бойынша есептеу алгоритмі

1) Шекті-айырымды схемадан  $f_{i,n+1}$  шамасын айқын түрде сипаттайық:

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1,n} - f_{i-1,n}) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n})$$

$$i = 2, L-1$$

$$n = 2, 3, 4, \dots$$

немесе

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} - \frac{c}{2} (f_{i+1,n} - f_{i-1,n}) + d (f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}).$$

2)  $n=1$ ,  $i=2, L-1$   $f_{i,1}=f_0$  -  $n=1$  барлық түйіндердегі мәндер берілген

3)  $i=1$ ,  $n=1, 2, \dots$   $f_{1,n}=f_1$  -  $i=1$  барлық түйіндердегі мәндер берілген

4)  $i=L, n=1, 2, \dots f_{L,n}=f_2 - i=L$  барлық түйіндердегі мәндер берілген

Осылайша барлық шекаралық түйіндердегі мәндер берілген.

5) Келесі уақыттық қабат түйіндеріндегі бастапқы функцияның мәні шекті-айырымды өрнектерден былайша анықталады:

$$6) f_{2,2} = f_{2,1} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{3,1} - f_{1,1}) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}(f_{3,1} + f_{1,1} - 2f_{2,1}),$$

$$f_{3,2} = f_{3,1} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{4,1} - f_{2,1}) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}(f_{4,1} + f_{2,1} - 2f_{3,1}),$$

$$f_{L-1,2} = f_{L-1,1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x^2}(f_{L,1} - f_{L-2,1} - 2f_{L-1,1}).$$

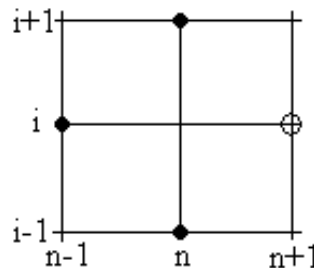
Осылайша келесі  $n=2$  уақыттық қабаттағы шешім табылды. Содан соң  $n=3$  үшін шешім және т.с.с. басқа шешімдер де бізге қажетті  $t$  мәні табылғанша есептеле береді.

### «Чехарда» айқын схемасы

Біз қолданып отырған модельдік теңдеуге қатысты бұл схема мынадай түрге ие болады: уақыт бойынша туынды орталық айырымдармен, ал шекті-айырымды аппроксимацияларда екінші туындының  $f_{i,n}$  мәні орташа арифметикалық  $f_{i,n+1}$  және  $f_{i,n-1}$  шамаларымен алмастырылады:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n-1}}{2\Delta t} + u \frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n+1} - f_{i,n-1}}{\Delta x^2},$$

шаблонның нұсқасы мынадай болады: төрт нүктелік шаблон, үшқабатты бір қадамдық схема.



8-сурет

Бір қадамды болуының себебі -  $n+1$  қабаттағы мән 1 қадамнан кейін анықталады. Мұнда оң жақтағы мүшенің құрамына бастапқы  $f_{i,n+1}$  шамасы кіреді. Алайда, бұл теңдеуді  $f_{i,n+1}$ -ге қатысты айқын түрде шешуге болады:

$$f_{i,n+1} = f_{i,n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}) - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}f_{i,n+1}$$

$$f_{i,n+1} = \frac{f_{i,n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1})}{1 + \frac{2a\Delta x}{\Delta x^2}}$$

немесе

$$f_{i,n+1} = [f_{i,n-1} - c(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}) + 2d(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1})]/(1 + 2d)$$

### Конвективті тасымал теңдеуі үшін «Айқын бұрыш» схемасы

Модельдік теңдеуді конвективті мүшені қалдырған кезде қарастырайық:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

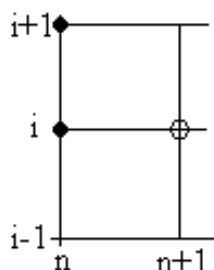
Біз орнықсыздық құбылысын қарастырған кезде конвективті мүшенің орнықсыздықты тудыратындығына көз жеткізген болатынбыз (егер оны орталық айырымдар арқылы жазсақ). Сондықтан кеңістіктік айнымалылар үшін бір жақты айырымдарды қолданады:

$$u > 0 \text{ болғанда } \frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} = -u \frac{f_{i,n} - f_{i-1,n}}{\Delta x}$$

$$u < 0 \text{ болғанда } -u \frac{f_{i+1,n} - f_{i,n}}{\Delta x}$$

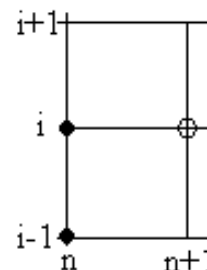
үш нүктелі шаблон, екі қабатты бір қадамды схема

$u < 0$  болғанда, шаблон:



9-сурет

$u > 0$  болғанда, шаблон:



10-сурет

$u > 0$  болатын жағдайды қарастырайық:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + \frac{f_{i,n} - f_{i-1,n}}{\Delta x} = 0$$

немесе

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} - c(f_{i,n} - f_{i-1,n}). \quad (*)$$

Берілген шекті-айырымды теңдеуді берілген теңдеуге түрлендіру үшін оны Тейлор қатарына жіктейміз:

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t^2,$$

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} = \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

$$f_{i-1,n} = f_{i,n} - \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2,$$

$$f_{i,n} - f_{i-1,n} = \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

алынған өрнектерді (\*) теңдеуге әкеліп қоямыз:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} u \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} u \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Төмендегі теңдеуді қолдана отырып,  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  шамасын  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  арқылы бейнелейміз:

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = -u \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -u \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \\ &= -u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left( -u \frac{\partial f}{\partial x} \right) = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} u \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \Delta t u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} u \Delta x (1 - c) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

$a_c = \frac{1}{2} u \Delta x (1 - c)$  белгілеуін енгізіп мынаны аламыз:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = a_c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$a_\Delta = a_c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Осылайша «айқын бұрыш» схемасы бойынша алынған шекті-айырымды схема бастапқы берілген теңдеуге емес, қосымша диффузиялық мүшесі бар теңдеуге эквивалентті екендігін көруге болады.

Екінші туындыға қатысты  $a_c$  коэффициенті схемалық жасанды диффузия (немесе схемалық жасанды тұтқырлық) деп аталады, сонымен қатар оны аппроксимациялық диффузия коэффициенті (немесе тұтқырлық аппроксимациясы) деп те атай береді.

$a_c$  коэффициентіне арналған өрнектен көрініп тұрғанындай,  $c=1$  болғанда (орнықтылықтың шекті шарты)  $a_c=0$ .

$\Delta t$  кеміген сайын  $a_c$  артады, сәйкесінше, аппроксимация қателігі де ұлғая түседі.  $u < 0$  болатын схема үшін:

$$a_c = \frac{1}{2} u \Delta x (1 + c) - \text{бұл кезде } c \text{ ешқандай мәнінде } a_c \neq 0, \text{ яғни бұл схема}$$

күштірек диссипативті әсерге ие.

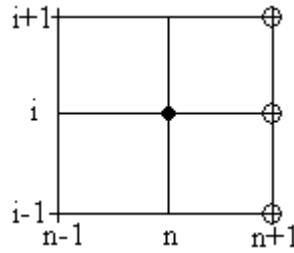
Айқын схемалардың мұнан өзге көптеген түрлері бар. Оларды нақты берілген дифференциалдық есептің түріне байланысты таңдап алған жөн.

### Айқын емес схемалар

Егер кеңістіктік айнымалыларды аппроксимациялау барысында функцияның  $n$ -ші қабаттағы емес,  $n+1$  қабаттағы мәнін алатын болсақ, онда толығымен айқын емес схемаға қол жеткіземіз:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{\Delta x^2}$$

Енді  $f_{i,n+1}$  мәнін алдыңғы уақыттық қабаттардағы мәндер арқылы айқын сипаттауға болмайды.  $f_{i,n+1}$  анықтау үшін теңдеулер жүйесін шешу қажет.



11-сурет

### Айқын емес схема бойынша есептеу алгоритмі

Шекті-айырымды теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\begin{aligned} f_{i,n+1} - f_{i,n} + \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}) &= \\ = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}) \end{aligned}$$

$$(1 + 2d)f_{i,n+1} + \left(\frac{c}{2} - d\right)f_{i+1,n+1} - \left(\frac{c}{2} + d\right)f_{i-1,n+1} = f_{i,n}.$$

Бұл теңдеуді былайша түрлендіріп жазуға болады:

$$[A_i T_{i-1} + B_i T_i + C_i T_{i+1}]_{n+1} = D_{i,n}.$$

Бұл теңдеуді қуалау әдісімен шешуге болады. Оның негізгі тармақтарын атап өтейік.

1. Тура қуалау: қуалау коэффициенттері келесі өрнектер арқылы табылады:

$$P_{i,n+1} = \left[ \frac{-C_i}{B_i + A_i P_{i-1}} \right]_{n+1}.$$



$$Q_{i,n+1} = \left[ \frac{D - A_i Q_{i-1}}{B_i + A_i P_{i-1}} \right]_{n+1}, \quad i = 2, L-1.$$

2. Кері қуалау:  $f_i$  төмендегі теңдеуден анықталады:

$$f_{i,n} = [P_i \quad f_{i+1} + Q_i]_{n+1}, \quad i = L-1, 2.$$

### Айқын емес схеманың орнықтылығын зерттеу

Конвективті тасымал және диффузия теңдеулерін жеке-жеке қарастырайық. Орнықтылықты фон Нейман әдісімен зерттейтін боламыз:

$$1) \frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}}{2\Delta x} = 0 \text{ - конвекция теңдеуі,}$$

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} + \frac{c}{2}(f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}) = 0,$$

$$f_{i,n} = V_n e^{li\theta},$$

$$V_{n+1} e^{li\theta} - V_n e^{li\theta} + \frac{c}{2}(V_{n+1} e^{l(i+1)\theta} - V_{n+1} e^{l(i-1)\theta}) = 0,$$

$$V_{n+1} - V_n + \frac{c}{2} V_{n+1} (e^{l\theta} - e^{-l\theta}) = 0,$$

$$V_n (1 + cI \sin \theta) = V_n,$$

$$G = \frac{1}{1 + cI \sin \theta} = \frac{1 - cI \sin \theta}{1 + c^2 \sin^2 \theta},$$

$$|G|^2 = \frac{1 + c^2 \sin^2 \theta}{(1 + c^2 \sin^2 \theta)^2} = \frac{1}{1 + c^2 \sin^2 \theta} \leq 1,$$

$$\forall c \text{ болғанда } 1 \leq 1 + c^2 \sin^2 \theta \Rightarrow c^2 \sin^2 \theta \geq 0.$$

Осылайша толығымен айқын емес схема үшін  $c$  шамасына тәуелсіз түрде  $|G| \leq 1$  берілген схема абсолютті орнықты. Бұл өз кезегінде уақыт бойынша үлкен қадамдармен есептеулер жүргізуге мүмкіндік береді, ал бұл қасиет үлкен артықшылық болып табылады.

2) Диффузия теңдеуі:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} = a \frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{\Delta x^2},$$

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} = d(f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}),$$

$$V_{n+1}e^{i\theta} - V_n e^{i\theta} = d(V_{n+1}e^{i(i+1)\theta} + V_{n+1}e^{i(i-1)\theta} - 2V_{n+1}e^{i\theta}),$$

$$V_{n+1} - V_n = dV_{n+1}(e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2),$$

$$V_{n+1}[1 - 2d(\cos \theta - 1)] = V_n,$$

$$G = \frac{1}{1 + 2d(1 - \cos \theta)}, \text{ өйткені}$$

$$\forall d \text{ үшін } \cos \theta \leq 1 \Rightarrow |G| \leq 1$$

Осылайша диффузия теңдеуіне арналған толығымен айқын емес шекті-айырымды схема абсолютті орнықты екен.